ELEMENTI
DELLA
GEOMETRIA
COSI' PIANA, COME SOLIDA

COLL' AGGIUNTA

DI UN BREVE TRATTATO

DELLE SEZIONI CONICHE

COMPOSTI

PER USO DELLA REGALE ACCADEMIA MILITARE

DA

NICCOLO' DI MARTINO

PRIMARIO PROFESSORE DELLA MEDESIMA.

TOMO III.

IN NAPOLI
NELLA STAMPERIA SIMONIANA
MDCCLXVIII.

BREVE TRATTATO
DELLE
SEZIONI CONICHE.

GL' Antichi Geometri, dopo eſſerſi avviſati, che non tutti li problemi geometrici poſſono riſolverſi colla linea retta, e colla linea circolare, penſarono ad altre linee più compoſte, di cui ſi poteſſe far uſo nella riſoluzione di coloro, che ſono di grado ſuperiore; e le prime, che ad eſſi ſi preſentarono, furono la parabola, l'elliſſe, e l' iperbole, che chiamarono ſezioni coniche, perchè le derivarono dalla varia ſezione di quel ſolido, che chiamaſi cono. Di queſte tre curve, dopo molti altri, trattò diſteſamente Apollonio, con rendere altresì più univerſale la maniera, con cui prima deducevanſi dal cono; ma noi in queſto breve Trattato ci reſtringeremo alle proprietà loro principali, a cui daremo principio, con far vedere, come ricavanſi dal cono, e quale ſia l' indole di ciaſcuna di eſſe.

§. I.

Del modo di dedurre le tre curve dal cono, e dell'indole della prima, chiamata parabola.

2. CHe s'intende da Geometri per cono, e quali ſiano le ſue ſpecie, fu a baſtanza da noi ſpiegato negl'Elementi della Geometria ſolida; ove ſi avvertì parimente, che ſiccome la ſezione fatta per un piano, che paſſa per lo vertice del cono, dee eſſere triangolo, così l'altra fatta per un piano parallelo alla ſua baſe ſia cerchio. Ma può ſegarſi il cono per un piano, che nè paſſi per lo vertice, nè ſia parallelo alla ſua baſe; onde, ſecondo la varia ſua inclinazione ſulla baſe del cono, ſi avranno nella ſuperficie conica le tre curve, che chiamanſi parabola, elliſſe, ed iperbole.

3. Qualunque ſia la curva, che ſegna nella ſuperficie conica il piano ſecante, ſe in eſſa ritroviſi una retta, che divida per metà tutte le rette parallele, terminate alla ſteſſa curva, ſi dirà ella eſſere ſuo diametro; e ſe la medeſima retta divida quelle rette parallele, non ſolo per metà, ma ancora ad angoli retti, ſi darà ad eſſa il nome

me di asse. Conforme poi quel punto, in cui l' asse, o diametro incontrasi colla curva, si chiamerà suo vertice; così le metà di quelle rette parallele si diranno essere sue ordinate.

4. Or ciascuna delle tre curve, che deduconsi dal cono, ha non uno, ma infiniti diametri, e tra di essi incontrasi eziandio quello, a cui dee darsi il nome di asse. Per dedurle intanto *Fig.* dal cono col loro asse, sia il cono 1. PQDR, che abbia per base il cerchio QDE, per vertice il punto P, e per asse la retta PS. Facciasi passare per quest' asse PS il piano PQR in modo, che ancora nel cono scaleno insista perpendicolarmente sulla sua base QDE; e siccome la sezione, fatta nel cono per mezzo di questo piano, dee essere triangolo, così la QR sarà diametro della base del cono QDE.

5. Seghisi in appresso lo stesso cono talmente per l' altro piano ADE, che la retta DE, in cui egli s' incontra colla base QDE, sia perpendicolare sulla QR; ed io dico, che la AF, comune sezione di quest' altro piano col piano del triangolo PQR, sia non solo diametro, ma asse altresì della curva DAE, segnata da quest' altro piano nella superficie conica. Per dimostrarlo, prendasi nella AF un punto

N ad arbitrio, e per esso conducasi il piano GMO parallelo alla base del cono QDE, di cui sia GH la comune sezione col piano del triangolo PQR, ed MO la comune sezione col piano ADE.

6. Poichè dunque il piano GMO è parallelo alla base del cono QDE; la sezione, fatta da esso nello stesso cono, sarà similmente cerchio, di cui la GH sarà diametro. Ma, per essere parallele, così le due DE, MO, come le due QR, GH, ancora la MO dee essere perpendicolare sulla GH. Dunque sarà divisa per metà, tanto la DE nel punto F, quanto la MO nel punto N; e per tanto, terminandosi le due DE, MO alla curva DAE, la AF, che le divide per metà, sarà diametro della stessa curva.

7. Essendo poi il piano del triangolo PQR perpendicolare alla base del cono QDE; la DE, come perpendicolare sulla QR, che è la comune loro sezione, sarà perpendicolare altresì al piano del triangolo PQR. Onde, giacendo la AF in questo stesso piano, sarà tanto la DE, quanto la sua parallela MO perpendicolare similmente sulla AF; e per tanto la AF, dividendo le due DE, MO, non solo per metà, ma ancora ad angoli retti, sarà

sarà asse altresì della curva D A E.

8. Or l' asse della curva D A E, secondo la diversa inclinazione del piano secante A D E sulla base del cono Q D E, conforme può essere parallelo all' altro lato PQ del triangolo PQR, così potrà con esso incontrarsi, tanto al di sotto, quanto al di sopra del vertice P. Onde, per questi tre casi, che possono avvenire, la curva prenderà tre forme diverse; e si chiamerà parabola nel primo caso, ellisse nel secondo, ed iperbole finalmente nel terzo.

9. Per incominciare dalla parabola, *Fig.* in cui l' asse A F è parallelo all' altro 1. lato P Q del triangolo P Q R, la sua proprietà si è, che li quadrati delle due ordinate D F, M N siano, come le porzioni dell' asse A F, A N, prese dal suo vertice A, e corrispondenti alle stesse ordinate. In fatti, attenta la proprietà del cerchio, li quadrati delle due ordinate D F, M N sono, come il rettangolo delle due Q F, R F al rettangolo delle due G N, H N. Ma questi due rettangoli, per essere eguali li loro lati Q F, G N, sono nella semplice ragione di R F ad H N, o pure di A F ad A N. Dunque ancora li quadrati delle due ordinate D F, M N saranno, come A F ad A N.

10. Quindi, se la A C sia di lun-

Fig. ghezza tale, che il quadrato di una
2. delle due ordinate, come della DE, sia eguale al rettangolo della AC nella porzione dell' asse ad essa corrispondente AF; chiaro si è, che ancora il quadrato dell' altra ordinata MN debba essere eguale al rettangolo della stessa AC nella porzione dello stesso asse AN, che corrisponde a quest' altra ordinata. E poichè secondo la AC dee giudicarsi della lunghezza dell' ordinate relativamente alle corrispondenti porzioni dell' asse; quindi si è, che siasi dato alla AC il nome di parametro, che suol situarsi nel vertice dell' asse AF in sito parallelo alle sue ordinate.

11. Con rette intanto dello stesso cono, può determinarsi la lunghezza del parametro AC. Tirisi perciò nel piano del triangolo PQR la AI parallela alla RQ; ed io dico, che le tre PI, AI, AC siano continuamente proporzionali. In fatti, essendo il quadrato della DF eguale, così al rettangolo delle due QF, RF, come al rettangolo delle due AC, AF; sarà AF ad RF, come QF, o sia AI ad AC. Ma AF sta ad RF, come PI ad AI. Dunque sarà ancora PI ad AI, come AI ad AC. Con maggior compendio però potrà determinarsi lo stesso parametro, se facciasi l' angolo AIK

AIK eguale all' angolo FAR; poichè, incontrandosi la IK coll'asse AF nel punto K, si faranno eguali le due AC, AK; per essere AI ad AK eziandio nella ragione di PI ad AI.

12. Del rimanente niente vieta, di prolungare la retta, che descrive la superficie conica, al di sotto del cerchio QDE; col quale prolungamento si distenderà più oltre, tanto il cono, quanto la sua superficie conica. Onde, se dentro del cono prolunghisi parimente il piano secante ADE, ancora la parabola DAE, ed il suo asse AF, riceveranno estensione maggiore. E poichè l'ordinate, con allontanarsi maggiormente dal vertice A, acquistano sempre più maggior lunghezza; quindi si è, che la parabola, con distendersi più oltre, si discosti sempre più dal suo asse, e si aumenti in conseguenza la sua ampiezza.

§. II.

Dell' indole della seconda curva, che ricavasi dal cono, chiamata ellisse.

Fig. 3. 13. PEr passare ora all' ellisse, in cui l'asse AF incontrasi coll'altro lato P Q del triangolo P Q R al di sotto del vertice P; chiaro si è, che se distendasi più oltre, tanto il cono, quanto il piano secante, l' ellisse chiuderà spazio; e facendosi il riferito incontro nel punto B, sarà A B il suo asse totale, di cui in conseguenza due ne saranno li vertici. La sua proprietà poi si è, che li quadrati delle due ordinate D F, M N siano, come li rettangoli, fatti dalle porzioni dell' asse totale, prese dalli due vertici, e corrispondenti alle stesse ordinate, cioè, come il rettangolo delle due A F, B F al rettangolo dell' altre due A N, B N.

14. In fatti, attenta la proprietà del cerchio, li quadrati delle due ordinate D F, M O sono, come il rettangolo delle due Q F, R F al rettangolo dell' altre due G N, H N. Ma questi due rettangoli sono in ragion composta di Q F a G N, e di R F ad H N; o pure in ragion composta di BF a BN, e di

e di AF ad AN. Dunque, essendo in questa stessa ragion composta eziandio il rettangolo delle due AF, BF al rettangolo dell'altre due AN, BN, saranno li quadrati di quelle due ordinate similmente, come questi due rettangoli.

15. Quindi, se la AC parallela all' ordinate DF, MN sia di lunghezza tale, che il quadrato di una di esse DF sia al corrispondente rettangolo delle due AF, BF, come AC ad AB; chiaro si è, che nella stessa ragione di AC ad AB debba essere altresì il quadrato dell' altra ordinata MN al rettangolo dell' altre due AN, BN, che ad essa corrisponde. E poichè, congiungendosi la BC, ed incontrandosi con essa una dell' ordinate, come la MN, nel punto V, il rettangolo delle due AN, NV sta al rettangolo dell' altre due AN, BN, come NV a BN, o pure come AC ad AB; chiaro ancora si è, che il quadrato dell' ordinata MN debba essere eguale al rettangolo delle due AN, NV. *Fig.* 4.

16. Quantunque poi nell' ellisse il quadrato dell'ordinata MN, come eguale al rettangolo delle due AN, NV, sia minore del rettangolo, fatto dalla AC nella corrispondente porzione dell' asse AN; pure per mezzo della AC dee

giudicarsi della lunghezza dell' ordinate relativamente alle porzioni dell'asse, che ad esse corrispondono; poichè, se bene il quadrato dell' ordinata MN sia propriamente eguale al rettangolo delle due AN, NV, nientedimeno la NV, che terminasi alla BC, riceve la sua determinazione dalla AC; e quindi si è, che ancora nell' ellisse siasi dato alla AC il nome di parametro.

17. Con rette intanto dello stesso cono può determinarsi la lunghezza del parametro AC. Tirinsi perciò per gli vertici A, e B dell' asse AB le rette AI, BL parallele alla QR, che s'incontrino colli due lati PQ, PR del triangolo PQR ne' punti I, ed L; ed io dico, che saranno proporzionali le quattro rette AB, BL, AI, AC: dimodochè il rettangolo dell' asse AB nel parametro AC, che appellasi figura dello stesso asse, sarà eguale al rettangolo delle due parallele AI, BL, tra le quali rimane compreso il medesimo asse.

18. Nè ciò è difficile a dimostrarsi. Imperocchè, essendo il quadrato dell'ordinata DF eguale al rettangolo delle due QF, RF, sarà AC ad AB, come il rettangolo delle due QF, RF al rettangolo dell' altre due BF, AF; ed in conseguenza in ragion composta

di

di Q F, a B F, e di R F ad A F; o pure in ragion composta di AI ad AB, e di B L alla stessa A B. Ma in questa stessa ragion composta sta ancora il rettangolo delle due A I, B L al quadrato della A B. Dunque sarà A C ad A B, come questo rettangolo a questo quadrato; e per tanto essendo A C ad AB, come il rettangolo delle due AC, A B al quadrato della A B, sarà il rettangolo delle due A C, A B eguale al rettangolo dell'altre due A I, B L.

19. Con maggior compendio però potrà determinarsi la lunghezza del parametro AC, se facciasi l'angolo AIK eguale all'angolo F A R; poichè, incontrandosi la I K coll'asse A B nel punto K, si faranno eguali le due AC, AK. Ed in fatti, siccome coll' uguaglianza di quelli due angoli si fanno equiangoli tra di loro li due triangoli A I K, B A L; così, per essere A I ad A K, come A B a B L, sarà il rettangolo delle due A I, B L eguale al rettangolo dell' altre due A B, A K. Ma il primo di questi due rettangoli si è dimostrato eguale al rettangolo delle due A B, A C. Dunque, dovendo essere l' altro ancora eguale a questo stesso rettangolo, saranno eguali le due A C, A K.

20. Attenta questa maniera di deter-

terminare la lunghezza del parametro A C, chiaro si è, che nell'ellisse, ricavata dal cono retto, l'asse AB sia sempre maggiore del suo parametro A C; poichè essendo in questo cono eguali li due lati PQ, PR del triangolo PQR, sarà l'angolo A I B sempre maggiore dell'angolo A I K. Ma, se il cono sia scaleno, siccome in esso sono disuguali li due lati P Q, P R; così l'angolo A I B potrà essere non solo maggiore, ma ancora minore dell'angolo A I K; e per tanto eziandio l'asse AB potrà essere, così maggiore, come minore del suo parametro A C.

Fig. 5.

21. Niente però vieta, che nel cono scaleno faccians talvolta eguali li due angoli A I B, A I K; ma in questo caso, facendosi l'asse A B eguale al suo parametro A C, sarà il quadrato dell'ordinata D F eguale al rettangolo delle due corrispondenti porzioni dell'asse A F, F B, onde l'ellisse si cambierà in circonferenza di cerchio. Vedesi intanto, che ciò dee avvenire, qualora il piano secante A D E inclinasi talmente sulla base del cono scaleno Q D E, che faccians eguali li due angoli P A F, P Q F; e la sezione, fatta nel cono con questa legge, chiamasi da Geometri sezione subcontraria.

22. In fatti, essendo eguali li due an-

angoli PAF, PQF, saranno eguali ancora gl'altri due RAF, BQF; onde, facendosi equiangoli li due triangoli AFR, QFR, sarà AF ad RF, come QF a BF; e per tanto il rettangolo delle due QF, RF sarà eguale al rettangolo dell' altre due AF, BF. Ma, per essere cerchio la base del cono QDE, il quadrato della DE è eguale al rettangolo delle due QF, RF. Dunque lo stesso quadrato sarà eguale altresì al rettangolo dell'altre due AF, BF; ed in conseguenza il punto D sarà nella circonferenza del cerchio, che ha per diametro la AB.

23. Essendo poi il quadrato dell'ordinata DF al quadrato dell'altra MN, come il rettangolo delle due AF, BF al rettangolo dell' altre due AN, BN; ancora il quadrato della MN sarà eguale al rettangolo delle due AN, BN; onde eziandio il punto M sarà nella circonferenza del cerchio, che ha per diametro AB. E poichè lo stesso dee avvenire ad ogn' altro punto della sezione subcontraria; perciò la sezione stessa non sarà diversa dalla circonferenza del cerchio, descritto sulla AB come diametro.

§.III.

§. III.

Dell' indole della terza curva, che ricavasi dal cono, chiamata iperbole.

Fig. 24. 6. RImane finalmente l'iperbole, in cui l'asse AF incontrasi coll'altro lato P Q del triangolo P Q R al di sopra del vertice P nel punto B. Ma, siccome questa curva, con prolungare tanto il cono, quanto il piano secante estendesi all' infinito a simiglianza della parabola; così in essa incontrasi ciò di speciale, che dalla parte opposta ne riceve un' altra simile, ed eguale, che considerate insieme chiamansi iperboli opposte.

25. Ed in fatti la retta, che descrive la superficie conica, può prolungarsi ancora al di sopra del vertice P; onde colla stessa retta così prolungata nel mentre, che descrivesi il cono al di sotto del vertice P, se ne descriverà un' altro al di sopra, interamente opposto al primo, onde si è, che appellansi coni opposti. Se adunque il piano secante A D E prolunghisi ancora al di sopra, dimodochè seghi parimente il cono opposto, si segnerà nella superficie di quest' altro cono un' altra iperbole, che

che ſarà non ſolo oppoſta, ma ſimile altresì, ed eguale alla prima.

26. Conforme poi l' aſſe A B ſi fa comune alle due iperboli oppoſte, così la lunghezza di eſſo rimane determinata dalle ſteſſe iperboli; il quale perciò, a ſimiglianza di quello dell' elliſſe, ſi ritroverà avere due vertici, che ſono li due punti A, e B. Ma egli è da notarſi, che rimanendo l' aſſe AB racchiuſo tra le due iperboli oppoſte, l'ordinate in ciaſcuna di eſſe ſono applicate propriamente ſul di lui prolungamento; e da ciò deriva il divario tra l'elliſſe, e l' iperbole, le quali a prima faccia ſembrano avere per rapporto all' ordinate dell' aſſe la ſteſſa proprietà.

25. Ed in vero ancora nell' iperbole li quadrati delle due ordinate D F, M N ſono tra di loro, come li rettangoli, fatti dalle porzioni dell' aſſe, preſe dalli due vertici, e corriſpondenti alle ſteſſe ordinate, cioè, come il rettangolo delle due porzioni A F, B F al rettangolo dell' altre due AN, BN; la quale proprietà ha luogo, non ſolo ſe ambedue l' ordinate D F, M N prendanſi in un' iſteſſa iperbole, ma eziandio ſe una di eſſe prendaſi in una delle due iperboli, e l' altra nella ſua oppoſta.

28. La dimoſtrazione di una tal proprietà è ſimile a quella dell' elliſſe; poi-

poichè, essendo li quadrati delle due ordinate D F, M N, come il rettangolo delle due Q F, R F al rettangolo dell' altre due G N, H N; li medesimi saranno in ragion composta di Q F a G N, e di R F ad H N; o pure in ragion composta di B F a B N, e di AF ad AN. Ma in questa stessa ragion composta sta ancora il rettangolo delle due A F, B F al rettangolo dell' altre due A N, B N. Dunque, come sono tra di loro questi due rettangoli, così saranno altresì li quadrati delle due ordinate D F, M N.

Fig. 7. 29. Quindi, se la A C parallela all' ordinate E F, M N sia di lunghezza tale, che il quadrato di una di esse DF sia al corrispondente rettangolo delle due AF, BF nella ragione di AC ad A B; chiaro si è, che nella stessa ragione di A C ad A B debba essere altresì il quadrato dell' altra ordinata M N al rettangolo dell' altre due AN, B N, che ad esso corrisponde. E poichè, congiungendosi la B C, ed incontrandosi con essa una delle due ordinate, come la M N, nel punto V, il rettangolo delle due A N, N V sta al rettangolo dell' altre due AN, BN, come N V a B N, o pure come A C ad A B; chiaro ancora si è, che il quadrato dell' ordinata M N debba essere

ſere eguale al rettangolo delle due AN, NV.

30. Quantunque poi nell'iperbole il quadrato dell'ordinata MN, come eguale al rettangolo delle due AN, NV, ſia maggiore del rettangolo, fatto dalla AC nella corriſpondente porzione dell' aſſe AN; pure per mezzo della AC dee giudicarſi della lunghezza dell' ordinate relativamente alle porzioni dell' aſſe, che ad eſſe corriſpondono; poichè, ſe bene il quadrato dell' ordinata MN ſia eguale propriamente al rettangolo delle due AN, NV, nientedimeno la NV, che terminaſi alla BC, riceve la ſua determinazione dalla AC; e quindi ſi è, che ancora nell' iperbole ſiaſi dato alla AC il nome di parametro.

31. Eziandio nell' iperbole può determinarſi la lunghezza del parametro AC con rette dello ſteſſo cono. Tirinſi perciò per gli vertici A, e B dell' aſſe AB le rette AI, BL parallele alla QR, che s' incontrino colli due lati PQ, PR del triangolo PQR ne'punti I, ed L; ed io dico, che ſaranno proporzionali le quattro rette AB, BL, AI, AC, dimodochè il rettangolo dell' aſſe AB nel parametro AC, che appellaſi figura dello ſteſſo aſſe, ſarà eguale al rettangolo delle due parallele AI,

AI, BL, tra le quali rimane compreso il medesimo asse.

32. La dimostrazione di ciò è simile a quella fatta nell' ellisse. Imperocchè, essendo il quadrato dell' ordinata DF eguale al rettangolo delle due QF, RF, sarà AC ad AB; come il rettangolo delle due QF, RF al rettangolo dell' altre due BF, AF; ed in conseguenza in ragion composta di QF a BF, e di RF ad AF, o pure in ragion composta di AI ad AB, e di BL alla stessa AB. Ma in questa stessa ragion composta sta ancora il rettangolo delle due AI, BL al quadrato della AB. Dunque sarà AC ad AB, come questo rettangolo a questo quadrato; e per tanto, essendo AC ad AB, come il rettangolo delle due AC, AB al quadrato della AB, sarà il rettangolo delle due AC, AB eguale al rettangolo dell' altre due AI, BL.

33. Ancora nell' iperbole con maggior compendio potrà determinarsi la lunghezza del parametro AC, se facciasi l' angolo AIK eguale all' angolo FAR; poichè, incontrandosi la IK coll' asse AB nel punto K, si faranno eguali le due AC, AK. Ed in fatti, conforme per l' uguaglianza di quelli due angoli, si fanno equiangoli li due tri-

triangoli AIK, BAL; così, per essere AI ad AK, come AB a BL, sarà il rettangolo delle due AI, BL eguale al rettangolo dell'altre due AB, AK. Ma il primo di questi due rettangoli si è dimostrato eguale al rettangolo delle due AB, AC. Dunque, dovendo essere ancora l'altro eguale a questo stesso rettangolo, saranno eguali le due AC, AK.

34. Notisi quì intanto, che ancora nell'iperbole l'asse AB può essere maggiore, minore, ed eguale al suo parametro AC; e nel caso dell'uguaglianza l'iperbole chiamasi equilatera, per essere eguali li lati, che contengono la figura del suo asse. Ma, per potersi fare eguali l'asse AB, ed il suo parametro AC, si ha bisogno di due condizioni, cioè, che il triangolo PQR sia rettangolo in P, e che il piano secante ADE s'incontri talmente colla base del cono QDE, che l'angolo AFR sia similmente retto; poichè con queste due condizioni li due triangoli AIB, AIK si fanno perfettamente eguali; onde l'asse AB sarà eguale al suo parametro AK, o sia AC.

35. Del rimanente li più antichi Geometri, a cui era noto il solo cono retto, per dedurre da tal cono le riferite tre curve, davano sempre al piano secante

cante posizione tale, che insistesse ad angoli retti sul lato PR del triangolo PQR; onde per ciascuna di esse avevano bisogno di un cono retto speciale, cioè del rettangolo per la prima, dell' acutangolo per la seconda, e dell'ottusangolo per la terza; le quali tre specie di cono retto distinguevansi da essi per l' angolo QPR dello stesso triangolo, che può essere retto, acuto, ed ottuso.

36. Quindi denominavano ciascuna delle tre curve col nome del cono, da cui la ricavavano, cioè, con chiamare la prima sezione di cono rettangolo, la seconda sezione di cono acutangolo, e la terza sezione di cono ottusangolo. Ma conobbe Apollonio, potersi dedurre le tre curve da qualsisia cono, non meno retto, che scaleno; e non potendo più competere ad esse li nomi di prima, furono dal medesimo chiamate parabola, ellisse, ed iperbole per la loro proprietà, di essere il quadrato di ciascuna ordinata nella prima eguale, nella seconda minore, e nella terza maggiore del rettangolo, fatto dal parametro nella corrispondente porzione dell' asse.

§.IV.

§. IV.

Del modo di defcrivere nel piano, così la parabola, come l'elliffe, e l' iperbole.

37. SPiegata la maniera di dedurre dal cono la parabola, l'elliffe, e l' iperbole, e dilucidata altresì l' indole di ciafcuna di effe; pafferemo ora a far vedere, come le fteffe curve poffano defcriverfi nel piano, per dimoftrare più facilmente nel piano fteffo l' altre loro affezioni. E per incominciare dalla parabola, conforme la fua proprietà per rapporto all' affe fi è, che il quadrato di qualfifia ordinata fia eguale al rettangolo del parametro nella porzione dell' affe, prefa dal vertice, e corrifpondente alla fteffa ordinata; così, fe fia dato l' affe infieme col parametro, potrà defcriverfi la parabola nel modo feguente.

38. Sia AB l' affe della parabola, *Fig.* 8.
e fia AC il fuo parametro, fituato talmente nel vertice A, che infifta full' affe ad angoli retti. Tirifi per lo punto C la CD parallela all' affe AB, e nel mentre, che la riga AX aggirafi intorno al vertice A, con portarfi dalla AC verfo l' affe AB, conducafi l'

altra

altra F Z verſo la C D in modo, che reſti ſempre parallela alla ſteſſa C D. Facciansi di poi li moti di queſte due righe con legge tale, che ſiano ſempre eguali le porzioni C E, A F, che le medeſime tagliano dalle due CD, AC; ed io dico, che col continuo interſegamento delle ſteſſe righe ſi abbiano li punti della parabola, che ſi dimanda.

39. Per dimoſtrarlo, ſia M un punto del loro interſegamento, da cui ſi abbaſſi ſull' aſſe A B la perpendicolare M N. Eſſendo adunque equiangoli li due triangoli A C E, M N A, ſarà A C a C E, come M N ad A N. Ma, per eſſere la AF eguale, così alla CE, come alla M N, ſono eguali le due C E, M N. Dunque ſarà altresì A C ad M N, come M N ad A N. Onde, facendoſi il quadrato della M N eguale al rettangolo del parametro A C nella porzione dell' aſſe A N, ſarà la M N ordinata dello ſteſſo aſſe; e per tanto il ſuo termine M ſarà uno de' punti della parabola ricercata.

40. Da queſta ſteſſa deſcrizione ricavaſi, che la parabola non ſolo ſia d' infinita eſtenſione, ma altresì che tanto più ſi diſcoſti dall' aſſe A B, quanto maggiormente allontanaſi dal vertice A. Conforme poi, giungendo la riga A X colla ſua rivoluzione ſull'

aſſe

asse A B, l' altra F Z si fa infinitamente distante dallo stesso asse; così, continuandosi quella ad aggirare intorno al vertice A, dovrà farsi la distanza dell' altra dal medesimo asse più che infinita, cioè negativa; onde si è, che debba ella ritornare verso l' asse dal lato opposto; col quale ritorno, intersegandosi tutta via le due righe, si descriverà l' altra metà della parabola, che si congiungerà colla prima nel vertice A.

41. Vedesi intanto, che non sia in nostro potere di fare, che la prima metà della parabola abbia l' intera sua estensione, per la ragione, che le porzioni eguali C E, A F, con cui debbonsi regolare li moti delle due righe, aumentansi continuamente a segno tale, che finalmente diventano di una lunghezza infinita. Onde, dopo essersi data a quella prima metà l'estensione, di cui si ha bisogno, potrà darsi all'altra metà un' estensione consimile, con trasportare le due righe dall' altro lato dell' asse A B, e con prendere le porzioni eguali sulle due C G, A H, che siano a dirittura coll' altre due C D, A C, per regolare li loro moti dall' altro lato.

42. Dalla medesima descrizione possono dedursi due conseguenze. La pri-

ma si è, che qualsisia retta, tirata parallela all'asse AB, debba in ogni distanza dallo stesso asse incontrarsi colla parabola, e farsi l'incontro in un sol punto. L'altra si è, che qualsisia retta, tirata dal vertice dell'asse AB in modo, che formi angolo acuto collo stesso asse, debba incontrarsi di nuovo colla parabola, e farsi eziandio in un sol punto quest'altro incontro. Anzi dalla stessa descrizione potrà dedursi altresì, come debbasi definire il punto dell'incontro, così dell'una, come dell'altra retta.

43. Per quanto poi all'ellisse, conforme la sua proprietà per rapporto all'asse si è, che il quadrato di qualsisia ordinata sia al rettangolo delle due porzioni dell'asse, prese dalli due vertici, e corrispondenti alla stessa ordinata, come il parametro allo stesso asse; così, se sia dato il suo asse insieme col parametro, potrà ella descriversi nel
Fig. modo seguente. Sia AB l'asse dell'el-
9. lisse, che si dee descrivere, e sia AC il suo parametro, situato talmente nel vertice A, che insista sull' asse ad angoli retti.

44. Tirisi primieramente la CD parallela all'asse AB, ed intorno ai due vertici A, e B dello stesso asse aggiungansi le due righe AX, BZ, portandosi la pri-

prima di esse AX dalla AC verso l'asse AB, e la seconda BZ al contrario dall' asse AB verso la C D. Faccians di poi le rivoluzioni di queste due righe in modo, che siano sempre eguali le porzioni C E, A F, che le medesime tagliano dalle due CD, AC; ed io dico, che coll'intersegamento continuo di queste stesse righe abbiansi li punti dell' ellisse, che si dimanda. Per dimostrarlo, sia M un punto del loro intersegamento, da cui si abbassi sull' asse A B la perpendicolare M N.

45. Siccome adunque il quadrato della MN sta al rettangolo delle due AN, B N in ragion composta di M N ad A N, e di M N a B N; così, per essere equiangoli, tanto li due triangoli M N A, A C E, quanto gl' altri due B N M, B A F, sarà altresì lo stesso quadrato allo stesso rettangolo in ragion composta di A C a C E, e di A F ad A B. Ma, per l' uguaglianza delle due CE, AF, queste due ragioni compongono la ragione di AC ad AB. Dunque il quadrato della MN sarà al rettangolo delle due A N, B N, come il parametro A C all' asse A B; e per tanto, dovendo essere la M N ordinata dell' asse A B, sarà il suo termine M uno de' punti dell' ellisse ricercata.

46. Da questa stessa descrizione rica-

cavasi, che l'ellisse, non solo sia di finita estensione, ma che chiuda altresì spazio, a simiglianza della linea circolare. Imperocchè, se bene l'ordinate dell'asse AB si aumentino continuamente dal vertice A per fino a che le due righe AX, B Z formano angoli eguali collo stesso asse; nientedimeno in appresso minoransi gradatamente col medesimo ordine, onde la mezza ellisse, che descrivesi da un lato dell' asse, si riunisce con esso nell' altro vertice B. E poichè lo stesso avviene all' altra mezza ellisse, che descrivesi dall' altro lato dell' asse, con continuarsi ad aggirare le due righe intorno agli stessi vertici; quindi si è, che l' intera ellisse ritorni in se stessa, e chiuda spazio.

47. Si vuol però notare, che quanto più le due righe AX, BZ discostansi dalle due AC, BA, tanto maggiori diventino le due porzioni eguali C E, A F, con cui debbonsi regolare le loro rivoluzioni. Onde, dopo esser giunte le due righe ad una tale situazione, che formano angoli eguali coll' asse AB, potrà regolarsi l' ulteriore loro rivoluzione, con tirare la BD parallela alla AC, e con prendere le due porzioni eguali sulle due B D, D C. E lo stesso dovrà farsi, per avere l'altra mezza ellisse dall'altro lato dell'asse.

48.

48. Dalla medesima descrizione ricavasi altresì, che qualsisia retta, tirata da ciascuno delli due vertici A, e B in modo, che formi angolo acuto coll'asse AB, debba incontrarsi di nuovo coll' ellisse, e farsi in un sol punto quest'altro incontro. Anzi, attenta la stessa descrizione, egli è facile ad intendersi, come debba determinarsi il punto, in cui ciascuna delle due rette incontrasi di nuovo coll' ellisse.

49. Finalmente per quanto all'iperbole, conforme la sua proprietà per rapporto all' asse si è, che il quadrato di qualsisia ordinata sia al rettangolo delle due porzioni dell' asse, prese dalli due vertici, e corrispondenti alla stessa ordinata, come il parametro allo stesso asse; così, se sia dato il suo asse insieme col parametro, potrà ella descriversi, a simiglianza dell' ellisse, nel modo seguente. Sia AB l' asse dell' iperbole, che si dee descrivere, e sia AC il suo parametro, situato talmente nel vertice A, che insista sull' asse ad angoli retti. *Fig.* 10.

50. Prolunghisi primieramente l' asse AB verso A, ed al suo prolungamento AN tirisi la parallela CD; indi intorno ai vertici A, e B aggirinsi le due righe AX, BZ, portandosi la prima di esse AX dalla AC verso la

 AN,

AN, e la seconda BZ al contrario dalla BN verso la CD. Faccianſi di poi le rivoluzioni di queſte due righe in modo, che ſiano ſempre eguali le porzioni CE, AF, che le medeſime tagliano dalle due CD, AC; ed io dico, che coll'interſegamento continuo delle ſteſſe due righe abbianſi li punti dell'iperbole, che ſi dimanda. Per dimoſtrarlo, ſia M un punto del loro interſegamento, da cui ſi abbaſſi ſull'aſſe AB prolungato la perpendicolare MN.

51. Siccome adunque il quadrato della MN ſta al rettangolo delle due AN, BN in ragion compoſta di MN ad AN, e di MN a BN; così, per eſſere equiangoli, tanto li due triangoli MNA, ACE, quanto gl' altri due BNM, BAF, ſarà altresì lo ſteſſo quadrato allo ſteſſo rettangolo in ragion compoſta di AC a CE, e di AF ad AB. Ma, per l'uguaglianza delle due CE, AF, queſte due ragioni compongono la ragione di AC ad AB. Dunque il quadrato della MN ſarà al rettangolo delle due AN, BN, come il parametro AC all' aſſe AB; e pertanto, dovendo eſſere la MN ordinata dell' aſſe AB, ſarà il ſuo termine M uno de' punti dell' iperbole ricercata.

52. Da queſta ſteſſa deſcrizione ricavaſi,

cavasi, che l'iperbole, non solo sia d'infinita estensione, a simiglianza della parabola, ma che ne abbia altresì un'altra opposta, situata nell' altro vertice B. Prolunghisi perciò, così l'asse AB verso K, come la CA verso G; e per l'altro vertice B tirisi la HI parallela alla CG. Siccome adunque le due righe AX, BZ intersegansi nell' angolo CAN per sino a che, formando angoli eguali coll' asse AB, diventano parallele; così, continuandosi ad aggirare intorno agli stessi vertici, si farà in appresso il loro intersegamento, primieramente nell' angolo IBK, indi nell' angolo HBK, e finalmente nell' angolo GAN; onde con questo stesso ordine si descriveranno le quattro metà d' infinita estensione delle due iperboli opposte.

53. Ma, conforme non è in nostro potere di fare, che ciascuna delle quattro metà abbia la sua infinita estensione; così, dopo essersi data alla metà della prima iperbole, che descrivesi nell'angolo CAN, quella estensione, di cui si ha bisogno, potrà darsi all'altra metà della stessa iperbole un' estensione consimile, con trasportare le due righe AX, BZ dall' altro lato dell'asse AB, e con regolare le loro rivoluzioni per mezzo di porzioni eguali,

prese sulle due CH, AG, che sono a dirittura coll'altre due CD, AC; e lo stesso dovrà farsi, per dare la stessa estensione alle due metà dell'altra iperbole opposta.

54. Dalla medesima descrizione ricavasi altresì, che qualsisia retta, tirata da ciascuno delli due vertici in modo, che formi angolo acuto coll' asse AB, debba incontrarsi di nuovo con una delle due iperboli opposte, e farsi in un sol punto quest' altro incontro. Anzi, attenta la stessa descrizione, egli è facile ad intendersi, come debba determinarsi il punto, in cui ciascuna delle due rette incontrasi di nuovo con una delle due iperboli opposte.

§. V.

Degl' altri diametri della parabola.

55. TRasportate nel piano le tre curve, che deduconsi dal cono, potremo ora con maggior facilità nel piano stesso dimostrare l' altre loro affezioni; ed incominciando di nuovo dalla parabola, la prima ricerca sarà degl' altri suoi diametri, che sono tutti paralleli al suo asse, il quale riguardasi perciò come diametro principale della parabola. Per questa ricerca fa duopo pre-

premettere il ſeguente teorema, cioè, *Fig.* che ſe AB ſia l'aſſe della parabola, e 11. da un punto di eſſa D tiriſi la DG parallela allo ſteſſo aſſe, che divida per metà nel punto E l'altra AM, tirata dal vertice A per ſino alla parabola; ſia la porzione di eſſa DE eguale alla porzione dell' aſſe AF, corriſpondente all'ordinata DF, abbaſſata ſull' aſſe dallo ſteſſo punto D.

56. Per dimoſtrarlo, ſi abbaſſi ſull' aſſe AB l'altra ordinata MN, a cui facciaſi parallela la EH. Eſſendo adunque equiangoli li due triangoli AMN, AEH, conforme la AM è dupla della AE, così ſarà dupla altresì, tanto la AN della AH, quanto la MN della EH, o ſia DF. Quindi, eſſendo il quadrato dell'ordinata MN quadruplo del quadrato dell' altra ordinata DF, ſarà la porzione dell' aſſe AN quadrupla parimente dell' altra porzione AF; onde, facendoſi la AH dupla della ſteſſa AF, ſaranno eguali le due AF, FH; ed in conſeguenza la DE, come eguale alla FH, ſarà eguale ancora alla AF.

57. Da queſto teorema poſſono dedurſi tre conſeguenze. La prima ſi è, che ſe dalli punti D, ed A tirinſi le rette DL, AK parallele alle due AM, DF, di cui la prima DL s'incontri

coll' asse A B nel punto L, e la seconda AK colla sua parallela DG nel punto K; sia il triangolo DFL eguale al parallelogrammo FK, ed il triangolo AEK eguale al parallelogrammo EL. In fatti, facendosi eguali, così le due AL, DE, come le due DK, AF, saranno le basi FL, EK delli due triangoli duple delle basi AF, DE delli due parallelogrammi. Onde, essendo situati tutti quattro tra le stesse parallele, saranno li due triangoli DFL, AEK eguali ai due parallelogrammi FK, EL.

58. La seconda conseguenza si è, che se nella parabola prendasi un'altro punto P ad arbitrio, da cui tirinsi le rette PQ, PR parallele alle stesse due AM, DF, che s'incontrino coll' asse AB ne' punti Q, ed R; sia il triangolo PRQ eguale al corrispondente parallelogrammo RK. In fatti li due triangoli PRQ, DFL, come simili tra di loro, sono come li quadrati delli loro lati omologi PR, DF. Ma questi due quadrati sono, come le corrispondenti porzioni dell' asse AR, AF, ed in conseguenza come li due parallelogrammi RK, FK. Dunque, essendo il triangolo DFL eguale al parallelogrammo FK, sarà l'altro triangolo PRQ

PRQ similmente eguale all'altro parallelogrammo RK.

59. La terza, ed ultima conseguenza si è, che se le stesse rette PQ, PR s'incontrino colla parallela all'asse DG ne' punti O, ed S, sia il triangolo POS eguale al corrispondente parallelogrammo OL. Interseghinsi perciò le due DL, AK nel punto I; ed essendo eguali le due DK, AL, saranno eguali ancora li due triangoli DIK, AIL; onde coll'aggiunta del comune pentagono ARSDI, sarà il parallelogrammo RK eguale al trapezio RSDL; e per tanto, dovendo essere eguale a questo stesso trapezio eziandio il triangolo PRQ, sarà il triangolo POS eguale al parallelogrammo OL.

60. Ricavate dal premesso teorema queste tre conseguenze, dimostreremo ora primieramente, che la DG parallela all'asse AB sia diametro della parabola, cioè, che divida per metà, non solo la AM, ma ogn'altra retta, che tirisi dentro della parabola parallela alla AM. Prolunghisi perciò la PQ per sino a che s'incontri di nuovo colla parabola nel punto *p*, da cui tirisi la *ps* parallela alla PS, che s' incontri colla DG nel punto *s*. Essendo adunque eguale allo stesso parallelogrammo OL, così il tri-

angolo POS, come il triangolo *pOs*, saranno eguali tra di loro questi due triangoli. Ma li medesimi, come triangoli simili, debbono essere, come li quadrati delli loro lati omologi PO, *p*O. Dunque ancora questi lati saranno eguali; e per tanto la P*p*, parallela alla AM, sarà divisa per metà nel punto O.

61. Dimostreremo in appresso, che il diametro DG abbia la stessa proprietà dell'asse AB, cioè, che li quadrati delle due sue ordinate AE, PO siano, come le corrispondenti porzioni DE, DO dello stesso diametro. In fatti, essendosi dimostrato, che il triangolo AEK sia eguale al parallelogrammo EL, ed il triangolo POS eguale al parallelogrammo OL; sarà il triangolo AEK al triangolo POS, come il parallelogrammo EL al parallelogrammo OL. Ma quelli due triangoli, come simili tra di loro, sono come li quadrati delli loro lati omologi AE, PO; e questi due parallelogrammi EL, OL, come situati tra le stesse parallele, sono come le loro basi DE, DO. Dunque li quadrati delle due ordinate AE, PO saranno, come le corrispondenti porzioni del diametro DE, DO.

62. Quindi, se la DV parallela all' ordinate AE, PO sia di tal lunghezza,

za, che il quadrato di ciascuna dell'ordinate sia eguale al rettangolo della D V nella porzione del diametro, corrispondente all'ordinata, sarà la DV il parametro del diametro DG. E posto, che AC sia il parametro dell' asse AB, attenta l' uguaglianza delle due D E, A F, saranno li due parametri D V, A C, come li quadrati delle due ordinate A E, D F. Anzi potrà dimostrarsi ancora, che il parametro del diametro D V sia maggiore del parametro dell' asse AC nel quadruplo della DE, ovvero A F.

63. In effetto, essendo la porzione dell' asse A N, corrispondente all' ordinata MN, quadrupla della AF, ovvero D E; sarà il quadrato della tutta A M eguale al rettangolo delle due D V, A N. Ma lo stesso quadrato, come eguale ai quadrati delle due MN, AN, è eguale altresì al rettangolo delle due A C, A N insieme col quadrato della A N, o pure al solo rettangolo delle due A C, A N unite insieme nella stessa A N. Dunque, dovendo essere la D V eguale alle due AC, AN unite insieme, sarà il parametro del diametro D V maggiore del parametro dell' asse A C nella A N, che è quadrupla della A F, ovvero D E.

64. Quindi, siccome aumentandosi

la

la distanza del diametro DG dall'asse AB, aumentasi ancora la AF; così riceverà maggior aumento eziandio il parametro DV dello stesso diametro. Onde, per quanto ai parametri, che competono ai diametri della parabola, conforme il minimo di tutti è il parametro dell' asse; così degl' altri il parametro del diametro più vicino all'asse sarà maggiore del parametro, che rapportasi al diametro più lontano dallo stesso asse; e se mai due diametri siano egualmente distanti dall' asse, li loro parametri dovranno essere eguali.

65. Del rimanente, comunque dentro della parabola tirisi la P*p*, siccome dal vertice dell'asse A può sempre tirarsi dentro della stessa parabola la AM parallela alla P*p*; così sempre dovrà esservi un diametro, che seghi per metà, tanto
Fig. la AM, quanto la P*p*. Quindi, se sia
12. data nel piano la sola parabola PAM, niente sarà più facile, quanto di determinare uno de' suoi diametri, ed in conseguenza la posizione di tutti gl'altri. Tirinsi perciò dentro di essa due rette parallele, che siano P*p*, Q*q*; e se le medesime dividansi per metà ne' punti O, ed R, sarà la DG, che passa per questi due punti uno de' suoi diametri.

66. Se il diametro ritrovato DG seghi

ſeghi le due parallele Pp, Qq ancora ad angoli retti; chiaro ſi è, che egli ſia l'aſſe della parabola. Ma, ſegandole obbliquamente, potrà determinarſi il ſuo aſſe, con alzare ſul diametro DG la perpendicolare DM, che s'incontri colla parabola nel punto M; poichè, diviſa la DM in due parti eguali nel punto F, e tirata per queſto punto la AB parallela allo ſteſſo diametro, dividerà queſta AB in parti eguali, e ad angoli retti non ſolo la DM, ma ogn' altra retta ancora, che tiraſi dentro della parabola parallela alla ſteſſa DM; e per tanto la medeſima AB ſarà l'aſſe della parabola.

67. Ed in fatti, avendo ogn' altro diametro della parabola la ſteſſa proprietà dell' aſſe, non ſolo potrà deſcriverſi, nella maniera inſegnata di ſopra, la parabola nel piano, eſſendo dato qualſiſia ſuo diametro inſieme col parametro, e colla poſizione delle ſue ordinate; ma il teorema dimoſtrato intorno all'aſſe, con tutte le conſeguenze da eſſo ricavate, dovrà aver luogo ancora per rapporto ad ogni diametro; onde non è da porſi in dubbio, che la AB, parallela al diametro DG, divida in parti eguali, e ad angoli retti, così la DM, come ogn' altra retta, tirata dentro della parabola parallela alla ſteſ-

ſa DM; ed in conſeguenza, che la ſteſſa AB ſia l'aſſe della parabola.

68. Per la ſteſſa ragione, ſe di un diametro della parabola, come DG, ſia nota la poſizione delle ſue ordinate, potrà determinarſi facilmente la poſizione dell' ordinate di qualſiſia altro diametro AB. Si abbaſſi perciò ſul primo DG dal vertice dell' altro AB l' ordinata AE; e ſe da queſt'altro diametro AB taglisi la porzione AF eguale alla DE, ſarà la DF una delle ſue ordinate. Conforme poi il parametro del diametro DG ſi ha colla terza proporzionale dopo le due DE, AE; così, ſe ritroviſi la terza proporzionale dopo l' altre due AF, DF, ſi avrà il parametro dell' altro diametro AB.

§. VI.

Delle tangenti della parabola.

69. Conforme una retta, che incontrandoſi colla parabola cade dentro di eſſa, diceſi eſſere ſua ſecante; così al contrario, ſe una retta s'incontri colla parabola in modo, che reſti tutta al di fuori, ſi dirà eſſere ſua tangente. Or intorno alla tangente della parabola il primo teorema, che deeſi dimoſtrare, ſi è, che ſe AB ſia uno de'

de' suoi diametri, e per lo vertice A *Fig.* tirisi la AH parallela alla sua ordinata 13. MN, questa AH debba essere tangente della parabola. Se sia possibile, s'incontri la AH colla parabola in un'altro punto, come D, e prolunghisi l'ordinata MN per sino a che s' incontri colla parabola dall' altra parte nel punto *m*.

70. Poichè dunque la AD è tirata dal vertice A del diametro AB per sino alla parabola; l' altro diametro, che divide la AD per metà, dovrà dividere la sua parallela M*m* eziandio in parti eguali (67). Ma la M*m* è divisa per metà nel punto N dal diametro AB, per essere le porzioni di essa MN, *m*N ordinate di questo diametro. Dunque non è egli vero, che la DH incontrasi di nuovo colla parabola nel punto D; e per tanto, cadendo tutta al di fuori, sarà sua tangeute.

71. Di questo teorema ha luogo ancora il converso, cioè, che essendo la AH tangente della parabola nel punto A, vertice del diametro AB, ella debba essere parallela all' ordinata MN dello stesso diametro. Se ciò si niega, faccia la AH angolo col parametro AC, situato nel vertice A in sito parallelo alla MN, e s' incontri colla CK parallela al diametro AB nel punto

to E. Adunque, se dalla AC taglisi la porzione AF eguale alla CE, e per lo punto F tirisi la FZ parallela allo stesso diametro, che seghi la AH nel punto D; per la descrizione della parabola, che secondo l' avvertimento fatto può eseguirsi con qualsisia diametro, sarà D uno de' suoi punti; onde la AH sarà secante, e non già tangente della parabola.

72. Quindi, non potendosi per un' istesso punto tirare due parallele ad una stessa retta, chiaro si è, che a qualsisia punto della parabola non possa tirarsi, se non che una sola tangente; onde, essendo una retta tangente della parabola, ogn' altra retta, tirata dal punto del contatto, dovrà cadere dentro di essa, ed essere in conseguenza sua secante; dal che ne segue, che ancora nella parabola l' angolo mistilineo, che forma con essa la sua tangente, debba essere minore d' ogni angolo acuto rettilineo.

Fig. 73. S'incontri ora la tangente MT,
14. tirata ad un punto M della parabola, con uno de' suoi diametri AB nel punto T; ed il secondo teorema, che deesi dimostrare si è, che abbassata sullo stesso diametro l' ordinata MN, siano eguali le due AN, AT. Sia perciò MR il diametro, che ha per suo vertice

tice il punto M; e tagliata da esso la porzione MO eguale alla AN, congiungasi la AO. Essendo adunque eguali le due AN, MO, sarà la AO ordinata del diametro MR; onde la MT, come tangente, sarà parallela alla AO; e per tanto, facendosi eguali le due MO, AT, sarà la AN ancora eguale alla AT; ed essendo così, la NT, che sostiene la tangente MT, e che perciò chiamasi sottotangente, sarà dupla, tanto della AN, quanto della AT.

74. Da questo teorema intanto ricavasi, che se AB sia l' asse della parabola, con cui s' incontri nel punto S la MS, alzata perpendicolarmente sulla tangente MT; la porzione dell' asse NS, che appellasi sottonormale, sia eguale alla metà del suo parametro AC. In fatti il quadrato della MN, conforme per la parabola è eguale al rettangolo delle due AC, AN, così per lo triangolo rettangolo TMS è eguale altresì al rettangolo dell' altre due NT, NS. Onde, dovendo essere eguali tra di loro questi due rettangoli, sarà AN ad NT, come NS ad AC; e per tanto, essendo la AN eguale alla metà della NT, sarà la NS eziandio eguale alla metà del parametro AC.

Fig. 14. 75. Il terzo teorema, che deesi dimostrare, si è, che se la tangente MT, tirata ad un punto M della parabola, s'incontri con uno de'suoi diametri AB nel punto T; il suo quadrato sia eguale al rettangolo della porzione del diametro A T nel parametro dell' altro diametro M R, che ha per vertice il punto del contatto M. Sia perciò MV il parametro di quest' altro diametro M R; e se ad esso tirisi dal vertice del primo A l'ordinata A O, saranno eguali tra di loro, così le due A O, M T, come le due M O, A T. Ma il quadrato della A O è eguale al rettangolo della MO nel parametro MV. Dunque ancora il quadrato della M T sarà eguale al rettangolo della A T nello stesso parametro.

Fig. 14. 76. Il quarto, ed ultimo teorema, che deesi dimostrare intorno alle tangenti della parabola, si è, che se AI, M I siano due tangenti, le quali s'incontrino tra di loro nel punto I; li quadrati di queste due tangenti siano, come li parametri delli due diametri, che hanno per vertici li due punti del contatto A, ed M. Siano perciò A B, MR questi due diametri, a cui tirinsi reciprocamente dalli loro vertici M, ed A l'ordinate MN, AO; e prolunghinsi le due tangenti per fino a che s'incontri

tri la prima A I col diametro M R nel punto K, e la seconda M I col diametro A B nel punto T.

77. Siccome adunque, per ragion dell'ordinate MN, AO, sono eguali le due AN, MO; così, per ragion delle tangenti MT, AK, saranno eguali ancora l'altre due A T, MK; onde le stesse tangenti saranno divise per metà nel punto I; ed in conseguenza, essendo eguali così le due A K, M N, come le due M T, A O, saranno li quadrati delle due A I, M I, come li quadrati dell'altre due MN, A O. Ma si è dimostrato di sopra (62), che li quadrati di queste due MN, AO siano come li parametri delli due diametri A B, M R. Dunque nella ragione di questi stessi parametri saranno altresì li quadrati delle due A I, M I.

78. Dovendosi tirare una tangente alla parabola da un dato punto, chiaro si è, che se il punto sia dato nella stessa parabola, altro non debba farsi, se non che tirare dal punto dato una retta parallela all'ordinate del diametro, che ha lo stesso punto per suo vertice. Ma, se il punto sia dato fuori *Fig.*
della parabola, come il punto T, si 14.
dovrà primieramente determinare il diametro A B, che passi prolungato per lo punto T; indi tagliare da questo dia-

diametro la porzione AN, che ſia eguale alla AT; e finalmente elevare su di eſſa la NM in modo, che ſia ordinata dello ſteſſo diametro; poichè, congiunta la MT, ſi avrà con queſta retta la tangente, che ſi dimanda.

§. VII.

Delle ſecanti della parabola.

79. PEr quanto alle ſecanti della parabola, non v'ha dubbio, che ciaſcuna di eſſe ſia, o uno de'ſuoi diametri, o pure un'ordinata di un qualche ſuo diametro; onde, ſiccome le prime ſegano la parabola in un ſol punto, così le ſeconde la ſegheranno in due punti, e non più. Poſſono intanto due ſecanti della parabola incontrarſi ancora tra eſſo loro; e per dimoſtrare la proprietà di queſto loro incontro, debbonſi diſtinguere due caſi; di cui il primo ſi è, quando un diametro incontraſi con un'ordinata di un altro diametro; ed il ſecondo, quando incontranſi tra di loro due ordinate di due diverſi diametri.

Fig. 15. 80. Sia adunque il diametro AB, che abbia per ſuo parametro la AC; e l'ordinata di eſſo MN prolunghiſi dall'altra parte per fino a che s'incontri di nuovo colla parabola nel punto *m*. Ti-

m. Tirisi la D G parallela al diametro A B, che sarà in conseguenza un'altro diametro; e la medesima vadasi ad incontrare colla M *m* nel punto E. Io dico, che il rettangolo delle due ME, *m*E, cioè delle due porzioni della M*m*, prese dalla parabola per sino al punto dell' incontro, sia eguale al rettangolo della DE nel parametro AC. Per dimostrarlo, si abbassi sul diametro A B l' altra ordinata D F.

81. Essendo adunque la M N ordinata del diametro A B, sarà il suo quadrato eguale al rettangolo della AN nel parametro AC; e similmente, essendo D F altra ordinata dello stesso diametro, sarà il suo quadrato eguale al rettangolo della A F nello stesso parametro; onde la differenza tra li due quadrati sarà eziandio eguale alla differenza tra li due rettangoli. Ma, per essere la D F eguale alla E N, la differenza tra li due quadrati è eguale al rettangolo delle due ME, *m*E; e per essere la F N eguale alla D E, la differenza tra li due rettangoli è eguale al rettangolo della D E nel parametro AC. Dunque ancora il rettangolo delle due M E, *m* E sarà eguale al rettangolo della DE nel parametro AC.

82. Attenta la dimostrazione di questo teorema, chiaro si è, che debba egli

gli aver luogo eziandio, ſe le due DE, M *m* s' incontrino tra di loro fuori della parabola; ma in queſto caſo potrebbe la M *m* eſſere così vicina al vertice del diametro AB, che facciaſi tangente della parabola. E poichè, quando ciò avviene, ſi fanno eguali le due ſue porzioni ME, *m*E, onde il loro rettangolo non è differente dal quadrato di una di eſſe; ſi potrà da queſto ſteſſo teorema dedurre la verità dell' altro poc' anzi dimoſtrato, cioè (75), che ſe la tangente AH, tirata al punto A, s' incontri col diametro DG nel punto H, ſia il ſuo quadrato eguale al rettangolo della DH nel parametro dell' altro diametro, che ha per vertice il punto del contatto A.

Fig. 15. 83. Sia inoltre OR un' altro diametro, che abbia per ſuo parametro la OS; e l' ordinata di eſſo PQ diſtendaſi ſimilmente dall' altra parte per ſino a che s' incontri di nuovo colla parabola nel punto *p*. Io dico, che incontrandoſi le due M *m*, P *p* nel punto E, ſia il rettangolo delle due ME, *m*E al rettangolo dell' altre due PE, *p*E, come il parametro AC al parametro OS; il che è chiaro, poichè, tirata al punto dell' incontro E la DE parallela ai due diametri, ſiccome il rettangolo delle due ME, *m*E ſi fa egua-

eguale al rettangolo della DE nel parametro AC, così l' altro rettangolo dell' altre due PE, pE si farà eguale al rettangolo della stessa DE nell'altro parametro OS; onde li due rettangoli, a simiglianza delli loro eguali, dovranno essere, come il parametro AC al parametro OS.

84. Da quest' altro teorema, che dee aver luogo, eziandio se le due Mm, Pp s' incontrino fuori della parabola, similmente può dedursi la verità di quel tanto di sopra è stato dimostrato (76), cioè, che incontrandosi insieme due tangenti, li loro quadrati siano, come li parametri delli due diametri, che hanno per loro vertici li due punti del contatto. In fatti, se le due Mm, Pp faccian si così vicine ai vertici delli due diametri AB, OR, che diventino tangenti della parabola; si faranno eguali tra di loro, così le porzioni della prima ME, mE, come le porzioni della seconda PE, pE; onde li loro rettangoli non saranno differenti dalli quadrati delle due rette, che sono tangenti della parabola nelli due vertici A, ed O, ed incontransi tra di loro.

85. Dallo stesso teorema può dedursi altresì, che incontrandosi una tangente con un' ordinata di un qualche diame-

tro, prolungata dall' altra parte per fino alla parabola, debba essere il quadrato della tangente al rettangolo delle due porzioni dell' ordinata prolungata, come il parametro del diametro, che ha per vertice il punto del contatto, al parametro dell' altro diametro, a cui
Fig. rapportasi l' ordinata. Ma per dimo-
16. strarlo indipendentemente dal riferito teorema, sia A E la retta, che essendo tangente della parabola nel vertice A, incontrasi colla P*p* nel punto E. Io dico, che il quadrato della tangente AE sia al rettangolo delle due PE, *p*E, come il parametro AC al parametro OS.

86. Tirisi per lo punto E la ED parallela ai due diametri AB, OR, che s' incontri colla parabola nel punto D; e per quel tanto è stato poc'anzi dimostrato (80), sarà il rettangolo delle due PE, *p*E eguale al rettangolo della DE nel parametro OS. Ma è stato dimostrato altresì (73), che il quadrato della tangente AE sia eguale al rettangolo della stessa DE nel parametro AC. Dunque il quadrato della tangente AE sarà al rettangolo delle due PE, *p*E, come il parametro AC al parametro OS.

87. Questo medesimo teorema intanto ci fa conoscere, che un cerchio

possa

possa segare la parabola, non solo in due, ma ancora in quattro punti. In fatti, se li due diametri AB, OR siano egualmente distanti dall' asse, saranno eguali li loro parametri; onde, facendosi il rettangolo delle due ME, *m*E similmente eguale al rettangolo dell' altre due PE, *p*E, chiaro si è, che il cerchio, che passa per gli tre punti P, M, *p*, debba passare ancora per lo quarto *m*. Ma, siccome ciò avviene, quante volte le distanze dall'asse delli due diametri AB, OR sono tra di loro eguali; così da questo stesso può dedursi, che non possa un cerchio segare la parabola in più di quattro punti. *Fig.* 15.

88. Se poi li due diametri AB, OR siano egualmente distanti dall'asse, e delli quattro punti li due M, ed *m* uniscansi insieme nel vertice A, e formino ivi un punto di contatto; in tal caso il cerchio s' incontrerà colla parabola in modo, che segandola negl'altri due P, e *p*, la toccherà nel punto A. E se quest'altri due punti P, e *p* congiungansi ancora insieme nell' altro vertice O, e formino ivi un' altro punto di contatto; lo stesso cerchio s' incontrerà talmente colla parabola, che senza segarla, la toccherà nelli due punti A, ed O. Onde si vede, che se bene il cerchio possa segare la parabola, così in

due, come in quattro punti; nientedimeno ſia impoſſibile, che il loro interſegamento facciaſi in tre punti.

89. In fatti, ſe un cerchio ſeghi la parabola nelli tre punti M, P, *p*; e congiunti li due P, e *p* per la retta P*p*, ritroviſi il diametro OR, che ſeghi la P*p* per metà; potrà ritrovarſi un' altro diametro AB, che ſia tanto diſtante dall' aſſe della parabola, per quanto diſta da eſſo il diametro OR. Onde, ſe MN ſia ordinata di queſt' altro diametro, che s' incontri prolungata, così colla P*p* nel punto E, come colla parabola nel punto *m*; ſarà il rettangolo delle due ME, *m*E eguale al rettangolo dell' altre due PE, *p*E; e per tanto lo ſteſſo cerchio ſegherà la parabola ancora nel punto *m*.

90. Qualora dunque un cerchio incontraſi colla parabola in tre punti, uno di eſſi dovrà eſſere punto di contatto, che equivale a due punti d' interſegamento; e ſi diſtinguerà un tal punto dagl' altri due per mezzo del diametro, tirato dallo ſteſſo punto, che dee eſſere tanto diſtante dall' aſſe, per quanto diſta da eſſo l' altro diametro, che divide per metà la retta, che congiunge inſieme gl' altri due punti; ed in una maniera conſimile potrà conoſcerſi, ſe li due punti, in cui incontraſi tal vol-

volta un cerchio colla parabola, ſiano punti d'interſegamento, o pure di contatto; ma ſe mai l'incontro di un cerchio colla parabola facciaſi in un ſol punto, non è da porſi in dubbio, che egli ſia punto di contatto.

§. VIII.

Del foco della parabola.

91. REſtano finalmente a dimoſtrarſi le proprietà, che riguardano il foco della parabola. Chiamaſi con queſto nome quel punto dell'aſſe, a cui corriſponde un'ordinata, eguale alla metà del parametro dello ſteſſo aſſe. Così, ſe AB ſia l'aſſe della parabola, *Fig.* e l'ordinata EF, corriſpondente al punto 17. F, ſia eguale alla metà del ſuo parametro AC; ſi chiamerà il punto F foco della parabola per una proprietà ſua ſpeciale, che da quì a poco ſarà da noi dimoſtrata. Onde, eſſendo continuamente proporzionali le tre AC, EF, AF; la AF, che è la diſtanza del foco dal vertice dell'aſſe, dovrà eſſere eguale alla metà dello ſteſſo parametro.

92. Le proprietà, attinenti al foco della parabola, deduconſi dal ſeguente teorema, cioè, che ſe prendaſi nella

parabola un punto M ad arbitrio, e da esso tirisi, così la MF al foco F, come la MN ordinata sull' asse AB; sia la MF eguale alle due AN, AF unite insieme. In fatti, essendo la AF eguale alla quarta parte del parametro AC, sarà il quadrato della MN eguale al quadruplo del rettangolo delle due AN, AF. Onde, coll' aggiunta del comune quadrato della NF, saranno li quadrati delle due MN, NF eguali al quadruplo del rettangolo delle due AN, AF insieme col quadrato della NF.

93. Conforme poi li quadrati delle due MN, FN sono eguali al solo quadrato della MF; così il quadruplo del rettangolo delle due AN, AF insieme col quadrato della NF è eguale al quadrato delle due AN, AF unite insieme. Dunque, dovendo essere il quadrato della MF eguale al quadrato, che si fa delle due AN, AF unite insieme; sarà la MF eguale a queste due insieme AN, AF. Onde, facendosi eguali le due AN, AF, qualora il punto M cade sul punto F; vedesi di nuovo, che la AF sia la metà della EF, ed in conseguenza la quarta parte del parametro AC.

94. Prolunghisi ora l' asse AB verso il vertice A talmente per sino al pun-

punto G, che ſiano eguali le due AG, AF; e ſe ſulla BG alziſi la perpendicolare GK, a cui ſi è dato il nome di direttrice della parabola, la prima conſeguenza, che ricavaſi dal teorema dimoſtrato ſi è, che la MF ſia eguale alla MK, abbaſſata perpendicolarmente ſulla direttrice GK. In fatti, eſſendo la AF eguale alla AG; coll'aggiunta della comune AN, saranno le due AN, AF inſieme eguali alla NG. Ma la MF è eguale alle due AN, AF unite inſieme, e la MK è eguale alla NG. Dunque ancora la MF sarà eguale alla MK.

95. La ſeconda conſeguenza, che ricavaſi dallo ſteſſo teorema, ſi è, che ſe al punto M tiriſi la tangente MT, su di cui eleviſi la perpendicolare MS, che s'incontrino coll'aſſe AB nelli punti T, ed S; ſia la MF eguale, così alla TF, come alla SF. In fatti, eſſendo eguali le due AT, AN, coll' aggiunta della comune AF, ſarà la TF eguale alle due inſieme AN, AF. Ed in oltre, eſſendo la NS eguale alla metà del parametro AC, ſarà la ſteſſa NS eguale al duplo della AF; e per tanto coll'aggiunta della comune NF, ſarà la SF ſimilmente eguale alle due inſieme AN, AF. Onde la MF, come eguale a queſte ſteſſe unite inſie-

me, ſarà eguale, così alla TF, come alla SF.

96. La terza conſeguenza, che ricavaſi dal medeſimo teorema, ſi è, che ſe MR ſia il diametro, che ha per vertice il punto M; ſia così la MF, come ciaſcuna delle ſue eguali MK, TF, SF eguale alla quarta parte del ſuo parametro. In fatti, eſſendo il parametro del diametro MR maggiore del parametro dell' aſſe AC nel quadruplo della AN; ſarà la quarta parte dello ſteſſo parametro eguale alle due inſieme AN, AF. Ma a queſte ſteſſe due unite inſieme è eguale ancora la MF. Dunque, tanto la MF, quanto ciaſcuna delle ſue eguali MK, TF, SF, ſarà eguale alla quarta parte del parametro, che rapportaſi al diametro MR.

97. La quarta conſeguenza, che dal teorema dimoſtrato ricavaſi, ſi è, che ſe per lo foco F tiriſi al diametro MR l' ordinata PO; ſia la MO eguale alla quarta parte, e la PO eguale alla metà del parametro dello ſteſſo diametro. In fatti, dovendo eſſere la tangente MT parallela all' ordinata PO, ſaranno eguali le due TF, MO; e pertanto, non ſolo la TF, ma ancora la MO ſarà eguale alla quarta parte del parametro, che rapportaſi al diametro MR.

MR. E poichè l'intero parametro ſta a PO, come PO ad MO; chiaro ſi è, che l'ordinata PO debba eſſere eguale alla metà dello ſteſſo parametro.

98. Quindi, ſe bene il foco F ſia ſituato nell'aſſe AB, nientedimeno per rapporto ad eſſo qualſiſia diametro ha le ſteſſe proprietà dell'aſſe. Ed in fatti nel diametro MR è eguale alla quarta parte del ſuo parametro, così la MF, che è la diſtanza del ſuo vertice M dal foco F, come la MK, che è la perpendicolare abbaſſata dallo ſteſſo vertice ſulla direttrice GK; ed in oltre nello ſteſſo diametro l'ordinata PO, che paſſa per lo foco F, è eguale alla metà, e la porzione del diametro MO, corriſpondente alla ſteſſa ordinata, è eguale alla quarta parte dello ſteſſo parametro.

99. Ma, per ritornare alle conſeguenze, che ricavanſi dal teorema dimoſtrato, la quinta ſi è, che la tangente MT divida per metà l'angolo FMK, contenuto dalla MF tirata al foco F, e dalla perpendicolare MK abbaſſata ſulla direttrice GK. In fatti, eſſendo eguali le due MF, TF, ſarà l'angolo MTF eguale all'angolo TMF. Ma, per le parallele NG, MK, lo ſteſſo angolo MTF è eguale ancora all'angolo TMK. Dunque, facendoſi

eguali tra di loro li due angoli TMF, TMK, sarà tutto l'angolo FMK diviso per metà della tangente MT: dal che ne segue, che la stessa tangente debba dividere altresì per metà, e ad angoli retti la FK, per essere eguali le due MF, MK.

100. La sesta, ed ultima conseguenza, che ricavasi dal teorema dimostrato, si è, che prolungata la tangente TM verso V, siano eguali li due angoli TMF, VMR, che formano su di essa la MF tirata al foco, e la MR parallela all' asse AB. In fatti, per essere l'angolo FMK diviso per metà dalla tangente MT, sono eguali tra di loro li due angoli TMF, TMK. Ma l'angolo TMK è eguale all' angolo VMR, per essere angoli verticali. Dunque ancora li due TMF, VMR saranno tra di loro eguali.

101. Da questa uguaglianza d'angoli è derivato, che siasi dato al punto F il nome di foco. Imperocchè li raggi solari riflettonsi sulla superficie di qualsisia specchio con legge tale, che l'angolo di riflessione sia eguale all' angolo d'incidenza. Onde, se colla rivoluzione della parabola intorno al suo asse AB formisi un specchio concavo; li raggi solari, che cadono sulla sua superficie con direzione parallela allo stesso asse,

at-

attenta l' uguaglianza delli due angoli TMF, VMR, e di altri consimili, dovranno riflettersi in modo, che si riuniscano tutti nel punto F; il quale punto in conseguenza sarà il foco dello specchio.

102. Del rimanente, se sia data la direttrice GK insieme col foco F, potrà descriversi nel piano la parabola ancora in un' altro modo, ed ecco come. Prendasi la squadra LKR, il di cui lato KR corrisponda colla sua lunghezza all' estensione, che si vuol dare alla parabola; ed insieme con essa prendasi ancora un filo talmente lungo, che attaccato con uno de' suoi estremi al foco F, e coll' altro al termine R del lato KR, resti eguale allo stesso lato. Conducasi poi la squadra coll'altro lato KL sulla direttrice GK, e per mezzo di un stile facciasi in modo, che combaciandosi una porzione del filo col lato KR, l' altra resti continuamente tesa. E siccome, con condurre la squadra, ed il filo in questa guisa, si fanno sempre eguali le due MF, MK; così lo stesso stile segnerà nel piano la parabola, che si dimanda. *Fig.* 18.

§. VIII.

Degl' altri diametri dell' elliſſe.

103. DImoſtrate le principali proprietà della parabola, paſſeremo ora a quelle dell' elliſſe, a cui daremo ſimilmente principio colla ricerca degl' altri ſuoi diametri. Perciò, ſi vuol prima notare, che ſe A B ſia l' aſſe dell' elliſſe, ed il medeſimo dividaſi per metà nel punto C; ogn' altra retta D *d*, che tirata per queſto punto terminaſi all' elliſſe da ambedue le parti, reſti eziandio diviſa per metà nello ſteſſo punto. Per dimoſtrarlo, pongaſi, che la D *d* s' incontri coll' elliſſe ne' punti D, e *d*, dalli quali ſi abbaſſino ſull' aſſe A B l' ordinate D F, *df*.

Fig. 19.

104. Eſſendo adunque equiangoli li due triangoli C D F, C *df*, ſaranno li quadrati delle due CF, C*f* nella ſteſſa ragione colli quadrati dell' altre due D F, *df*. Ma, per l' elliſſe, queſti due quadrati ſono, come il rettangolo delle due A F, B F al rettangolo dell' altre due A*f*, B*f*. Dunque ancora li quadrati delle due C F, C*f* ſaranno, come queſti due rettangoli. Quindi, congiungendo inſieme gl' antecedenti, e li conſeguenti delle due ragioni eguali, fa-

saranno li quadrati delle due CF, C*f*, come li quadrati dell' altre due CA, CB; e per tanto, essendo eguali queste due CA, CB, saranno eguali altresì, tanto le due CF, C*f*, quanto le due CD, C*d*.

105. Or da ciò, che il punto C divide per metà tutte le rette, che tirate per esso terminansi all' ellisse da ambedue le parti, è derivato, che siasi dato allo stesso punto il nome di centro. Colle rette intanto, che passano per questo centro, si hanno gl'altri diametri dell' ellisse; ma per dimostrarlo, fa duopo premettere un teorema, corrispondente a quello, di cui si ebbe bisogno per la ricerca degl' altri diametri della parabola; e si è, che se la D*d*, *Fig.* tirata per lo centro dell' ellisse, divida 19. per metà nel punto E l' altra AM, tirata dal vertice dell' asse A per fino all' ellisse, e dal punto D si abbassi sull' asse AB l' ordinata DF; sia CE a CD, come CF a CA.

106. Si abbassi perciò sullo stesso asse AB l' altra ordinata MN, a cui facciasi parallela la EH. Essendo adunque la AM dupla della AE; per gli triangoli equiangoli AMN, AEH, sarà dupla altresì, tanto la MN della EH, quanto la AN della AH. Quindi, essendo la tutta AB eziandio dupla

pla della tutta CA, sarà la rimanente BN similmente dupla della rimanente CH; e per tanto il rettangolo delle due AN, BN sarà quadruplo del rettangolo dell'altre due AH, CH. Ma il quadrato della MN è ancora quadruplo del quadrato della EH. Dunque sarà il quadrato della MN al quadrato della EH, come il rettangolo delle due AN, BN al rettangolo dell' altre due AH, CH.

107. Essendo poi, per l'ellisse, il quadrato della DF al quadrato della MN, come il rettangolo delle due AF, BF al rettangolo dell'altre due AN, BN; sarà ordinando il quadrato della DF al quadrato della EH, o pure il quadrato della CF al quadrato della CH, come il rettangolo delle due AF, BF al rettangolo dell'altre due AH, CH. Onde, congiungendo insieme gl'antecedenti, e li conseguenti delle due ragioni eguali, sarà ancora il quadrato della CF al quadrato della CH, come il quadrato della CA al rettangolo delle due CA, CH, o pure come CA a CH; e per tanto, facendosi continuamente proporzionali le tre CH, CF, CA, ed essendo CH a CF, come CE a CD; sarà CE a CD, come CF a CA.

108. Da questo teorema ricavasi primie-

mieramente, che se dalli punti A, e D tirinsi le rette AK, DL parallele alle due DF, AE, di cui la prima s' incontri colla D*d* nel punto K, e la seconda coll' asse AB nel punto L; siano li due triangoli DFL, AEK eguali ai due trapezj AFDK, AEDL. Imperocchè, facendosi colle due parallele tirate, CE a CD, come CA a CL; e CF a CA, come CD a CK; sarà CA a CL, come CD a CK. Onde, dovendo essere eguali li due triangoli CAK, CDL, conforme tolto da essi il comune triangolo CDF, rimane il trapezio AFDK eguale al triangolo DFL; così, se dalli medesimi triangoli tolgasi l' altro comune CAE, rimanerà il triangolo AEK eguale al trapezio AEDL.

109. Ricavasi in secondo luogo, che se nell' ellisse prendasi un' altro punto P ad arbitrio, da cui tirinsi le rette PQ, PR parallele alle due AE, DF, che s' incontrino coll' asse AB ne' punti Q, ed R, e colla DE ne' punti O, ed S; sia il triangolo PQR eguale al corrispondente trapezio ARSK. In fatti, essendo il triangolo CAK al triangolo CFD, come il quadrato della CA al quadrato della CF; sarà dividendo il triangolo CAK al trapezio AFDK, come il quadrato della

CA

CA al rettangolo delle due AF, BF; e per la ſteſſa ragione ſarà ancora il triangolo CAK al trapezio ARSK, come il quadrato della CA al rettangolo delle due AR, BR.

110. Quindi, dovendo eſſere ordinando, come il trapezio AFDK al trapezio ARSK, così il rettangolo delle due AF, BF al rettangolo dell' altre due AR, BR; ſaranno gli ſteſſi due trapezj, come li quadrati delle due ordinate DF, PR. Ma li quadrati di queſte due ordinate ſono nella ſteſſa ragione colli due triangoli DFL, PRQ. Dunque ancora li due trapezj ſaranno, come queſti due triangoli; e per tanto, eſſendo il triangolo DFL eguale al trapezio AFDK, ſarà l' altro triangolo PRQ eguale all' altro trapezio ARSK.

111. Ricavaſi finalmente, che il triangolo PSO, formato dalle ſteſſe due PQ, PR colla D*d*, con cui s' incontrano, ſia eguale al corriſpondente trapezio QODL. Interſeghinſi perciò le due AK, DL nel punto I. Ed eſſendo il triangolo DFL eguale al trapezio AFDK; tolto da eſſi il comune trapezio AFDI, ſaranno eguali li due triangoli AIL, DIK; e per tanto coll' aggiunta del comune pentagono ARSDI, ſarà il trapezio RSDL egua-

eguale al trapezio ARSK. Ma a questo secondo trapezio è eguale ancora il triangolo PRQ. Dunque, facendosi il triangolo PRQ eguale altresì al primo trapezio RSDL, sarà il triangolo PSO eziandio eguale al trapezio QODL.

112. Ricavate dal premesso teorema queste conseguenze, dimostreremo ora primieramente, che la D*d* tirata per lo centro C sia diametro dell' ellisse, cioè, che divida per metà, non solo la AM, ma ogn' altra retta, che tirisi dentro dell' ellisse parallela alla AM. Prolunghisi perciò la PQ per fino a che s' incontri di nuovo coll' ellisse nel punto *p*, da cui tirisi la *ps* parallela alla PS, che s' incontri colla D*d* nel punto *s*. Essendo adunque eguale allo stesso trapezio QODL, così il triangolo POS, come il triangolo *p*O*s*, saranno eguali tra di loro questi due triangoli. Ma li medesimi, per essere simili, sono come li quadrati delli loro lati omologi PO, *p*O. Dunque ancora questi lati saranno eguali; e per tanto la P*p*, parallela alla AM, sarà divisa per metà nel punto O.

113. Dimostreremo in appresso, che il diametro D*d* abbia la stessa proprietà dell' asse AB, cioè, che li quadrati delle due sue ordinate AE, PO siano tra

tra di loro, come il rettangolo delle due porzioni D E, *d* E al rettangolo dell'altre due D O, *d* O. In fatti, essendo il triangolo C D L al triangolo C E A, come il quadrato della C D al quadrato della C E; sarà dividendo il triangolo CDL al trapezio AEDL, come il quadrato della C D al rettangolo delle due D E, *d* E. E così ancora, essendo il triangolo C D L al triangolo C O Q, come il quadrato della C D al quadrato della C O; sarà dividendo il triangolo C D L al trapezio Q O D L, come il quadrato della C D al rettangolo delle due D O, *d* O.

114. Quindi ordinando il trapezio A E D L sarà al trapezio Q O D L, come il rettangolo delle due DE, *d*E al rettangolo dell'altre due D O, *d o*. Ma li due triangoli A E K, P O S sono stati dimostrati eguali a quelli due trapezj; e li medesimi, come triangoli simili, sono come li quadrati delli loro lati omologi A E, P O. Dunque il quadrato dell'ordinata AE sarà al quadrato dell'altra ordinata PO, come il rettangolo delle due porzioni DE *d*E, corrispondenti alla prima ordinata, al rettangolo dell' altre due D O, *d* O, che corrispondono alla seconda.

Fig. 20. 115. Se poi la DV, parallela all'ordinate AE, PO, sia di tal lunghezza, che

che il quadrato di ciaſcuna dell' ordinate ſia al rettangolo delle porzioni del diametro, preſe dalli due vertici, e corriſpondenti alla ſteſſa ordinata, come D V a D *d*; ſarà la D V il parametro del diametro D *d*; ed il rettangolo delle due D V, D *d* ſi dirà eſſere la ſua figura. E ſe in oltre congiungaſi la *d* V, con cui vadaſi ad incontrare l' ordinata P O nel punto X, ſarà il quadrato della ſteſſa P O eguale al rettangolo delle due D O, O X per la ragione, che eſſendo OX a *d*O, come D V a D *d*, ancora il rettangolo delle due D O, O X ſta al rettangolo delle due DO, *d*O, come DV a D*d*.

116. Può dimoſtrarſi intanto, che la figura dell' aſſe A B ſia alla figura del diametro D *d*, come ſono li quadrati delle loro ordinate D F, A E. Sia perciò A H il parametro dell' aſſe A B; ed eſſendo il quadrato dell' ordinata D F al rettangolo delle due A F, B F, come A H ad A B, o pure come la figura dell' aſſe A B al quadrato dello ſteſſo aſſe; ſarà permutando il quadrato dell' ordinata D F alla figura dell' aſſe AB, come il rettangolo delle due A F, B F al quadrato dello ſteſſo aſſe. E per la medeſima ragione ancora il quadrato dell' altra ordinata A E ſarà alla figura del diametro D *d*, come

me il rettangolo delle due DE, dE al quadrato dello ſteſſo diametro.

117. Eſſendo poi proporzionali le quattro CF, CA, CE, CD, ſaranno proporzionali ancora li loro quadrati; ed in conſeguenza dividendo il rettangolo delle due AF, BF ſarà al quadrato della CA, come il rettangolo delle due DE, dE al quadrato della CD. Ma di queſti due quadrati ſono quadrupli li quadrati dell' aſſe AB, e del diametro Dd. Dunque ſarà ancora il rettangolo delle due AF, BF al quadrato dell'aſſe AB, come il rettangolo delle due DE, dE al quadrato del diametro Dd. Onde, dovendo eſſere il quadrato dell' ordinata DF alla figura dell' aſſe AB, come il quadrato dell' ordinata AE alla figura del diametro Dd; ſaranno le due figure, come li quadrati delle due ordinate DF, AE.

118. Del rimanente, comunque dentro dell' elliſſe tiriſi la Pp, ſiccome dal vertice dell'aſſe A ſi può ſempre tirare dentro della ſteſſa elliſſe la AM parallela alla Pp; così ſempre dovrà eſſervi un diametro, che ſeghi per metà,
Fig. tanto la AM, quanto la Pp. Quin-
21. di, ſe ſia data nel piano la ſola elliſſe AMB, conforme con tirare dentro di eſſa due rette parallele Pp, Qq, e con

con dividerle per metà ne' punti O, ed R, dee essere la D*d*, che passa per questi due punti, uno de' suoi diametri; così, se dividasi in appresso la stessa D*d* ancora per metà nel punto C, sarà questo punto C il centro dell'ellisse, per cui dovranno passare tutti gl' altri diametri.

119. Se il diametro ritrovato D*d* seghi le due parallele P*p*, Q*q* ancora ad angoli retti, chiaro si è, che egli sia l' asse dell'ellisse; ma segandole obbliquamente, potrà determinarsi l'asse, con descrivere col centro C, e coll'intervallo della CD l' arco circolare DM, che seghi l' ellisse nel punto M; poichè, congiunta la DM, ed abbassata su di essa dal centro C la perpendicolare CF, che s' incontri coll' ellisse ne' punti A, e B, dividerà la AB per metà, e ad angoli retti, tanto la DM, quanto ogn' altra retta, tirata dentro dell' ellisse parallela alla DM; ed in conseguenza la stessa AB sarà l'asse dell' ellisse.

120. Ed in vero, avendo ogn'altro diametro dell' ellisse la stessa proprietà dell' asse, non solo potrà descriversi l'ellisse nella maniera insegnata di sopra, essendo dato qualsisia suo diametro insieme col parametro, e colla posizione delle sue ordinate; ma il teorema dimo-

moſtrato per rapporto all'aſſe, con tutte le conſeguenze da eſſo ricavate, dovrà aver luogo ancora per rapporto ad ogni diametro; onde non è da porſi in dubbio, che la A B divida per metà, e ad angoli retti, così la D M, come ogn' altra retta, che tiraſi dentro dell' elliſſe parallela alla D M; ed in conſeguenza, che la ſteſſa A B ſia l' aſſe dell' elliſſe.

Fig. 20. 121. Per la ſteſſa ragione, ſe di un diametro dell' elliſſe, come D *d*, ſia nota la poſizione delle ſue ordinate, potrà facilmente determinarſi la poſizione dell' ordinate di qualſiſia altro diametro A B. Si abbaſſi perciò ſul primo D *d* dal vertice dell' altro A B. l' ordinata A E; e ſe da queſt' altro tagliſi la porzione AF in modo, che CF ſia a C A, come C E a C D, ſarà la D F una delle ſue ordinate; e ſi avrà in appreſſo il ſuo parametro, ſe prolungata la D F talmente per ſino al punto G, che ſiano continuamente proporzionali le tre A F, D F, F G, tiriſi per lo ſuo vertice A la A H parallela alla ſteſſa D F, che vadaſi ad incontrare colla B G nel punto H.

§.IX.

§. IX.

Delli diametri conjugati dell' elliſſe.

122. QUalunque ſia il diametro dell' elliſſe, non v' ha dubbio, che debba eſſervi un' altro diametro, che ſia parallelo alle ſue ordinate; ma queſto ſteſſo fa, che all'ordinate di queſt' altro ſia ancora parallelo il primo diametro. Pongaſi perciò, *Fig.* che A B ſia un diametro qualſiſia dell' 22. elliſſe, e per lo centro C tiriſi l'altro diametro D *d* parallelo alle ſue ordinate. Io dico, che il diametro A B ſia eziandio parallelo all' ordinate di queſt' altro D *d*. Per dimoſtrarlo, tiriſi la M *m* parallela al diametro A B, che s' incontri coll' elliſſe ne' punti M, ed *m*, e coll' altro diametro D *d* nel punto O.

123. Adunque, ſe dalli punti M, ed *m* ſi abbaſſino ſul diametro A B l' ordinate M N, *m n*, ſaranno eguali li loro quadrati; e per tanto il rettangolo delle due A N, B N ſarà ancora eguale al rettangolo dell' altre due A *n*, B *n*. Quindi, togliendo queſti due rettangoli dalli quadrati delle due C A, C B, che ſimilmente ſono eguali, ſaranno eguali altresì li quadrati delle due

due CN, C*n*, o pure delle due MO, *m*O; ed in conseguenza, essendo la M*m* divisa dal diametro D*d* egualmente nel punto O, saranno le sue metà MO, *mo* ordinate dello stesso diametro.

124. Avendosi due diametri di questa indole, ciascuno di essi dicesi essere conjugato dell' altro; ed egli è facile il dimostrare, che il conjugato D*d* sia mezzo proporzionale tra il diametro AB, di cui è egli conjugato, ed il parametro AH dello stesso diametro. In fatti, essendo la DC ordinata del diametro AB, il suo quadrato sarà al rettangolo delle due AC, BC, o sia al quadrato di una di esse AC, come AH ad AB. Ma li quadrati delli due diametri D*d*, AB sono quadrupli delli quadrati delle due DC, AC. Dunque, dovendo essere essi ancora, come AH ad AB; sarà AH a D*d*, come D*d* ad AB.

125. Quindi, se due diametri conjugati pongasi in mezzo ai loro parametri, si avranno con essi quattro rette continuamente proporzionali. Onde, siccome la figura di qualsisia diametro è eguale al quadrato del suo conjugato; così il rettangolo di due diametri conjugati sarà eguale al rettangolo delli loro parametri. Ed in oltre, conforme un

un diametro è maggiore, o minore del ſuo conjugato, ſecondo che è maggiore, o minore del ſuo parametro; così, ſe un diametro ſia maggiore, o minore del ſuo parametro, dovrà eſſere al contrario il ſuo conjugato minore, o maggiore del parametro, che ad eſſo compete.

126. Attenta l' indole delli diametri conjugati, chiaro ſi è, che le loro ordinate ſiano su di eſſi egualmente inclinate; onde, dovendo l'aſſe ſimilmente avere il ſuo conjugato, ſarà queſto ſuo conjugato un' altro aſſe dell'elliſſe. Conforme poi delli due aſſi uno dee eſſere maggiore dell' altro; così per poco, che ſi voglia riflettere, s' intenderà facilmente, che di tutti li diametri il maſſimo ſia l' aſſe maggiore, ed il minimo l' aſſe minore; anzi s' intenderà ancora, che degl' altri diametri il più vicino all' aſſe maggiore ſia maggiore del più lontano; e che li due egualmente diſtanti dallo ſteſſo aſſe ſiano tra di loro eguali.

127. Per quanto tocca ai parametri degli ſteſſi diametri, chiaro ancora ſi è, che ſiccome il minimo di tutti è il parametro dell' aſſe maggiore, ed il maſſimo il parametro dell' aſſe minore; così degl' altri il parametro del diametro più vicino all' aſſe maggiore ſia

minore del parametro, che rapportaſi al diametro più lontano; ed eſſendo due diametri egualmente diſtanti dallo ſteſſo aſſe, ſaranno eguali li loro parametri. Ma egli è da notarſi, che conforme li diametri vicini all'aſſe maggiore hanno per loro conjugati gl'altri vicini all'aſſe minore; così li primi ſaranno maggiori, ed al contrario li ſecondi minori delli loro parametri.

128. Separanſi intanto gl' uni dagl' altri diametri per due conjugati, che ſono eguali, non ſolo tra eſſo loro, ma eziandio colli loro parametri; e poſſono determinarſi queſti due conjugati eguali per mezzo degli ſteſſi aſſi, ed *Fig.* 23. ecco come. Sia A B l' aſſe maggiore, e D *d* l' altro minore. Congiunganſi le rette A D, A *d*, B D, B *d*; e ſiccome tutte quattro debbono eſſere eguali, così ſaranno parallele altresì, tanto le due A D, B *d*, quanto le due B D, A *d*; onde li diametri M *m*, P *p*, che dividono l' une, e l' altre per metà, come egualmente diſtanti dall'aſſe maggiore A B, ſaranno tra di loro eguali. Ma gli ſteſſi diametri ſono ancora conjugati, per eſſere ciaſcuno di eſſi parallelo all' ordinate dell' altro. Dunque li conjugati eguali, che ſeparano gl' altri diſuguali, ſaranno li due M *m*, P *p*.

129.

129. Li due assi poi tanto meno differiscono tra esso loro, quanto meno ciascuno di essi differisce dal suo parametro: dimodochè, facendosi uno delli due assi eguale al suo parametro, si saranno eguali gli stessi assi; ma, quando ciò avviene, si faranno eguali tra di loro tutti li diametri, onde l' ellisse *Fig.* si cambierà in circonferenza di cerchio. 24. In fatti, se l' asse A B sia eguale al suo parametro, sarà il quadrato di qualsisia sua ordinata M N eziandio eguale al rettangolo delle corrispondenti porzioni dell' asse A N, B N. Onde coll' aggiunta del comune quadrato della CN, sarà il quadrato della C M eguale al quadrato della C A; e per tanto, facendosi eguali le due C M, C A, sarà il diametro M*m* eziandio eguale all' asse A B.

130. Del rimanente da ciò, che la figura di qualsisia diametro sia eguale al quadrato del suo conjugato, possono dedursi molte conseguenze, che ci condurranno ad una proprietà molto rilevante degli stessi diametri conjugati. *Fig.* Siano perciò li due diametri AB, M*m*, 25. su di cui reciprocamente dalli loro vertici si abbassino l' ordinate MN, AE, e degli stessi diametri, conjugati ne siano gl' altri due D*d*, P*p*. Io dico primieramente, che le due ordinate MN,

A E ſiano nella ſteſſa ragione con queſti due conjugati D*d*, P*p*, ed in conſeguenza colle loro metà CD, CP.

131. La ragione è chiara, poichè ſecondo è ſtato diſopra dimoſtrato (116), li quadrati delle due ordinate M N, A E ſono, come le figure delli loro diametri A B, M*m*. Ma le figure di queſti diametri ſono eguali ai quadrati delli loro conjugati D*d*, P*p*. Dunque, come ſono li quadrati di queſti due conjugati, così ſaranno altresì li quadrati delle due ordinate M N, A E; e per tanto le ſteſſe ordinate ſaranno proporzionali, tanto colli due conjugati D*d*, P*p*, quanto colle loro metà CD, C P.

132. Io dico in ſecondo luogo, che ſe ſul conjugato D*d* ſi abbaſſi dal vertice dell'altro P*p* l'ordinata P O, ſia C D a C O, come C A a C N. Per dimoſtrarlo, tiriſi la E F parallela alla M N. E conforme C D ſta a C P, come M N ad A E; così, per gli triangoli equiangoli C P O, A E F, C P ſta a C O, come A E ad E F; onde ordinando CD ſarà a CO, come MN ad E F. Ma, per gl' altri triangoli equiangoli C M N, C E F, M N ſta ad E F, come C M a C E, o pure come C A a C N. Dunque ancora C D ſarà a C O, come C A a C N.

133.

133. Io dico in terzo luogo, che il quadrato dell' ordinata MN sia eguale al rettangolo delle due DO, *d*O. In fatti, essendo proporzionali le quattro CD, CO, CA, CN, saranno pcoporzionali ancora li loro quadrati; e per tanto dividendo il quadrato della CD sarà al rettangolo delle due DO, *d*O, come il quadrato della CA al rettangolo delle due AN, BN. Ma, per essere CD, MN ordinate del diametro AB, il quadrato della CA sta al rettangolo delle due AN, BN, come il quadrato della CD al quadrato della MN. Dunque il quadrato della CD sarà al quadrato della MN, come lo stesso quadrato della CD al rettangolo delle due DO, *d*O; ed in conseguenza il quadrato dell' ordinata MN sarà eguale al rettangolo delle due DO, *d*O.

134. Io dico finalmente, che al contrario il quadrato dell' altra ordinata PO sia eguale al rettangolo dell' altre due AN, BN. In fatti, essendo CA, PO ordinate del diametro D*d*, sarà il quadrato della CD al rettangolo delle due DO, *d*O, come il quadrato della CA al quadrato della PO. Ma si è veduto poc' anzi, che il quadrato della CD sia al rettangolo delle due DO, *d*O, come il quadrato della CA

al rettangolo delle due AN, BN. Dunque ancora il quadrato della CA sarà al quadrato della PO, come lo stesso quadrato della CA al rettangolo delle due AN, BN; e per tanto il quadrato dell' ordinata PO sarà eguale al rettangolo delle due AN, BN.

135. Or la proprietà rilevante delli diametri conjugati, a cui ci conducono le riferite conseguenze, si è, che se congiungansi insieme li quadrati di due di essi, si abbia sempre la stessa somma, cioè quella stessa, che ricavasi, con unire insieme li quadrati delli due assi. Pongasi perciò, che AB, D*d* siano li due assi dell' ellisse. Essendo adunque il quadrato della MN eguale al rettangolo delle due DO, *d*O, ed il quadrato della PO eguale al rettangolo dell' altre due AN, BN; saranno li due quadrati insieme eguali ai due rettangoli ancora uniti insieme. Onde, siccome con aggiungere agl' uni, e agl' altri li quadrati delle due CO, CN, si fanno li quadrati delle due CM, CP eguali ai quadrati dell' altre due CA, CD; così li quadrati delli due diametri conjugati M*m*, P*p* saranno ancora eguali ai quadrati delli due assi AB, D*d*.

136. Da questa proprietà intanto può dedursene un' altra, non meno rilevante

vante, che è comune a tutti li diametri, e si è, che se ai diametri aggiungansi li loro parametri, le somme siano nella reciproca ragione degli stessi diametri. In fatti, essendo la figura di un diametro eguale al quadrato del suo conjugato, sarà il quadrato di qualsisia diametro insieme coll' altro del suo conjugato eguale al rettangolo, che si fa dal diametro, e dal parametro uniti insieme nello stesso diametro. Onde, dovendo essere questo rettangolo ancora lo stesso in tutti li diametri, chiaro si è, che se a due diametri aggiungansi li loro parametri, le somme, che ne risultano, siano nella reciproca ragione degli stessi diametri.

137. Attenta questa proprietà, le riferite somme serberanno tra di loro lo stesso ordine delli parametri: dimodochè, siccome la minima è la somma, che corrisponde all' asse maggiore, ed al contrario la massima quella, che corrisponde all' asse minore; così dell' altre la somma, che rapportasi al diametro più vicino all' asse maggiore, sarà minore di quella, che rapportasi al diametro più lontano dallo stesso asse; e se mai due diametri siano egualmente distanti dall' asse maggiore, saranno eguali tra di loro le somme, che ad essi corrispondono: dal che ne se-

gue, che la differenza di due diametri sia minore della differenza de' loro parametri.

138. Per mezzo della stessa proprietà, se sia dato il parametro di un diametro, si potrà facilmente determinare il parametro di qualsisia altro diametro, ed ecco come. Congiungasi primieramente il parametro dato col suo diametro; indi facciasi, come il diametro, di cui si cerca il parametro, al diametro, di cui il parametro è dato, così quella somma ad una quarta proporzionale; e siccome con questa quarta proporzionale si ha la somma del primo diametro, e del suo parametro; così, se da essa tolgasi il diametro, si avrà col residuo il parametro, che si dimanda.

139. Del rimanente, conforme si ha un parallelogrammo, iscritto dentro dell' ellisse, colle quattro rette, che congiungono insieme li quattro vertici delli due diametri conjugati Mm, Pp; così la somma de' quadrati, fatti dalli lati di questo parallelogrammo dee essere eziandio sempre la stessa; e ciò per la ragione, che attenta la proprietà di qualsisia parallelogrammo, questi quadrati insieme debbono essere eguali ai quadrati delli due diametri conjugati

Mm

Mm, Pp, che ſono le diagonali dello ſteſſo parallelogrammo.

§. XI.

Delle tangenti dell' elliſſe.

140. Ancora nell' elliſſe le rette, che con eſſa s' incontrano, poſſono eſſere, così tangenti, come ſecanti; onde, per dimoſtrare con ordine le loro proprietà, incominceremo ſimilmente dalle tangenti, le quali incontranſi coll' elliſſe in modo, che reſtano interamente fuori di eſſa; ed il primo teorema, che deeſi dimoſtrare, ſi è, *Fig.* che ſe per lo vertice A di un diametro *26.* AB tiriſi la AK parallela alla ſua ordinata MN, queſta debba eſſere tangente dell' elliſſe.

141. Se ſia poſſibile, incontriſi la AK coll' elliſſe in un' altro punto, come D; e prolunghiſi l' ordinata MN per ſino a che s' incontri coll' elliſſe dall' altra parte nel punto m. Poichè dunque la AD è tirata dal vertice A del diametro AB per ſino all' elliſſe; l' altro diametro, che divide la AD per metà, dovrà dividere egualmente eziandio la ſua parallela Mm. Ma la Mm è diviſa per metà dal diametro AB, per eſſere ſue ordinate le porzio-

ni di essa M N, *m* N. Dunque non è egli vero, che A K incontrasi coll' ellisse nel punto D; e per tanto, cadendo fuori di essa, sarà sua tangente.

142. Di questo teorema è vero ancora il converso, cioè, che essendo la A K tangente dell' ellisse nel punto A, debba essere parallela all'ordinata M N del diametro AB. Se ciò si niega, formi la AK angolo col parametro AH, situato nel vertice del diametro in sito parallelo alla M N, e s' incontri nel punto E colla H L parallela al diametro A B. Se adunque dalla A H taglisi la porzione A F eguale alla H E, e congiungasi la B E, che seghi la A K nel punto D; per la descrizione dell'ellisse, che secondo l' avvertimento fatto può eseguirsi con qualsisia diametro, sarà D uno de'suoi punti; e per tanto la A K sarà sua secante, e non già tangente.

143. Quindi, siccome per un'istesso punto non possono tirarsi due parallele ad una stessa retta; così nè pure ad un medesimo punto dell' ellisse potranno tirarsi due tangenti. Onde, essendo una retta tangente dell' ellisse, ogn'altra retta, tirata dal punto del contatto, dovrà cadere dentro di essa, ed essere in conseguenza sua secante: dal che ne segue, che ancora nell' ellisse l' angolo mi-

mistilineo, che forma con essa la sua tangente, debba essere minore di ogn' angolo acuto rettilineo.

144. S' incontri ora la tangente MT, *Fig.* tirata ad un punto dell' ellisse M, con 27. uno de' suoi diametri AB nel punto T; ed il secondo teorema, che deesi dimostrare si è, che abbassata sul diamerro AB l' ordinata MN, siano le tre CN, CA, CT continuamente proporzionali. Sia perciò M*m* il diametro, che ha per suo vertice il punto M, e sia ancora AO ordinata di questo diametro. Dovendo adunque essere parallele le due AO, MT; sarà CO a CM, come CA a CT. Ma CN sta a CA, come CO a CM, per essere MN, AO ordinate delli due diametri AB, M*m*, tirate su di essi reciprocamente dalli loro vertici. Dunque CN sarà a CA, come CA a CT.

145. Da questo téorema intanto possono dedursi molte conseguenze; ed in primo luogo, siccome il rettangolo delle due CN, CT si fa eguale al quadrato della CA; così il rettangolo delle due AT, BT sarà eziandio eguale al rettangolo dell' altre due NT, CT. In fatti, se dal quadrato della CT tolgasi il quadrato della CA, rimane il rettangolo delle due AT, BT. Ma,

se dallo stesso quadrato della C T tolgasi il rettangolo delle due CN, CT, rimane il rettangolo delle due N T, C T. Dunque, dovendo essere eguali tra di loro li due residui, sarà il rettangolo delle due A T, B T eguale al rettangolo dell' altre due N T, C T.

146. In secondo luogo, se dalli punti A, C, B tirinsi le rette A I, C K, B L parallele all' ordinata M N, che s' incontrino colla tangente M T ne' punti I, K, L; sarà il rettangolo delle due A I, B L eguale al rettangolo dell' altre due N M, C K. In fatti, essendo il rettangolo delle due A T, B T eguale al rettangolo dell'altre due N T, C T; saranno proporzionali le quattro A T, N T, C T, B T; onde, per gli triangoli equiangoli A I T, N M T, C K T, B L T, saranno proporzionali ancora l' altre quattro A I, N M, C K, B L; e per tanto il rettangolo delle due estreme A I, B L sarà eguale al rettangolo delle due di mezzo N M, C K.

147. In terzo luogo, conforme le due AI, BL, come parallele alla NM, toccano l' ellisse ne' punti A, e B, che sono vertici del diametro A B; così il loro rettangolo sarà eguale al quadrato della metà del suo conjugato D d, ed in conseguenza eguale alla quarta parte

della

della ſua figura. Sia perciò M R ordinata del conjugato Dd; e dovendo eſſere continuamente proporzionali ancora le tre C R, C D, C K, ſarà il rettangolo delle due C R, C K, o pure delle due NM, CK eguale al quadrato della CD. Ma il rettangolo delle due A I, B L è eguale al rettangolo delle due N M, C K. Dunque lo ſteſſo rettangolo delle due A I, B L ſarà eguale altresì al quadrato della C D, che è la metà del conjugato Dd.

148. Finalmente, ſe AH ſia il parametro del diametro AB, ſarà il quadrato dell' ordinata M N al rettangolo delle due C N, N T, come A H ad A B. In fatti, eſſendo il rettangolo delle due CN, CT eguale al quadrato della CA; tolto da eſſi il comune quadrato della CN, ſarà il rettangolo delle due C N, N T eguale al rettangolo dell' altre due A N, B N. Ma il quadrato dell' ordinata M N ſta al rettangolo delle due A N, B N, come A H ad A B. Dunque lo ſteſſo quadrato dell' ordinata M N ſarà all'altro rettangolo delle due C N, N T ſimilmente, come A H ad A B.

149. Se poi A B ſia aſſe dell'elliſſe, *Fig.*
dallo ſteſſo teorema poſſono dedurſi al- 28.
tre conſeguenze. Eleviſi perciò ſulla tangente M T la perpendicolare M S, che

che s' incontri coll' asse A B nel punto S; ed io dico primieramente, che SN sia a C N, come il parametro A H all' asse A B. Imperocchè, facendosi il quadrato dell' ordinata M N eguale al rettangolo delle due S N, N T; ancora questo rettangolo sarà al rettangolo delle due C N, N T, come A H ad A B. Ma li due rettangoli sono tra di loro, come S N a C N. Dunque S N a C N similmente sarà, come A H ad A B.

150. Io dico in secondo luogo, che il quadrato della perpendicolare M S sia al rettangolo delle due porzioni della tangente I M, L M, come A H ad A B. In fatti le due M S, M N, come proporzionali colle due M T, N T, sono proporzionali altresì, così colle due I M, A N, come colle due L M, B N; onde il quadrato della M S sarà al rettangolo delle due I M, L M, come il quadrato della M N al rettangolo delle due A N, B N. Ma il quadrato della M N sta al rettangolo delle due A N, B N, come A H ad A B. Dunque ancora il quadrato della M S sarà al rettangolo delle due I M, L M, come A H ad A B.

151. Io dico finalmente, che se D*d* sia l' altro asse dell' ellisse, P*p* il conjugato di M*m*, e C Q un' altra perpen-

pendicolare abbassata dal centro C sulla tangente M T; sia C P a C D, come C A a C Q. In fatti, se P O sia ordinata dell' altro asse D *d*, per quel tanto è stato dimostrato di sopra (132), sarà C O a C D, come C N a C A, o pure, come C A a C T. Ma, per essere la tangente MT parallela al conjugato P*p*, sono equiangoli li due triangoli CPO, CTQ, ed in conseguenza C P sta a C O, come C T a C Q. Dunque perturbando sarà C P a C D, come C A a C Q.

152. Per mezzo di questa proprietà vedesi chiaramente, che la capacità del parallelogrammo, che circonscrivesi intorno all' ellisse colle tangenti, tirate ai vertici di due diametri conjugati, sia sempre la stessa. Onde essendo eguale alla sua metà l'altro, che iscrivesi dentro dell' ellisse, con unire insieme gli stessi vertici; ancora la capacità di quest' altro dovrà essere sempre la stessa. E poichè li lati, da cui è racchiuso il primo parallelogrammo, sono eguali ai due diametri conjugati; ancora in esso sarà sempre la stessa, così la somma de' quadrati delli suoi lati, come l'altra de' quadrati delle sue diagonali.

153. Il terzo teorema, che deesi dimostrare, si è, che se A I, M I siano due tangenti, che s' incontrino *Fig. 29.*

tra

tra di loro nel punto I; li loro quadrati, siano come le figure delli due diametri, che hanno per vertici li due punti del contatto A, ed M. Siano perciò AB, M*m* questi due diametri, colli quali incontransi le due tangenti ne' punti K, e T. Se adunque sugli stessi diametri si abbassino reciprocamente dalli loro vertici l' ordinate MN, AO, sarà CN a CA, come CO a CM. Ma, per la tangente MT, CN sta a CA, come CA a CT; e per l'altra tangente AK, CO sta a CM, come CM a CK. Dunque sarà ancora CA a CT, come CM a CK; e per tanto, facendosi eguali li due triangoli CMT, CAK, saranno eguali altresì gl'altri due AIT, MIK.

154. Quindi, dovendo essere AI a KI, come MI a TI; sarà componendo AI ad AK, come MI ad MT. Ma AK sta ad MN, come CA a CN, o pure come CM a CO. Dunque, essendo MT ad AO ancora in questa stessa ragione, sarà ordinando AI ad MN, come MI ad AO; ed in conseguenza permutando AI sarà ad MI, come MN ad AO. Onde, siccome li quadrati delle due ordinate MN, AO sono, come le figure delli loro diametri AB, MN; così nella ragione di queste stesse figure saranno al-

altresì li quadrati delle due tangenti A I, M I : dal che ne ſegue, che le ſteſſe tangenti ſiano, come li conjugati delli due diametri A B, M *m*.

155. Se poi la BL ſia tangente dell' elliſſe nel punto B, e la medeſima s' incontri colla M I nel punto L; ancora li quadrati delle due B L, M L ſaranno come le figure delli due diametri A B, M *m*. Ma, conforme da ciò ne ſegue, che A I ſia ad M I, come B L ad M L; ed in conſeguenza, che il rettangolo delle due A I, B L ſia al rettangolo dell' altre due M I, M L, come ſono li quadrati delle due A I, MI, o pure delle due BL, ML; così ancora queſti rettangoli ſaranno proporzionali alle ſteſſe figure. Onde, eſſendo il rettangolo delle due A I, B L eguale alla quarta parte della figura del diametro AB (147), ſarà l'altro rettangolo delle due MI, ML ſimilmente eguale alla quarta parte della figura dell' altro diametro M *m*.

156. Il quarto, ed ultimo teorema, che deeſi dimoſtrare, ſi è, che ſe al vertice M di un diametro M *m* tiriſi la tangente M T, che s'incontri nel punto T con un altro diametro A B, ed il conjugato di queſt'altro diametro ſia D*d*; debba eſſere il quadrato della tangente MT al rettangolo delle due AT, BT, *Fig.* 29.

BT, come la figura del diametro M*m* alla figura del conjugato D *d* dell'altro diametro. Sia perciò P *p* il conjugato del diametro M*m*, su di cui si abbassi l' ordinata AF; ed essendo parallele così le due MT, CF, come le due CM, AF, saranno equiangoli li due triangoli CMT, AFC; e per tanto MT sarà a CF, come CM ad AF.

157. Essendo adunque proporzionali le quattro rette MT, CF, CM, AF, saranno proporzionali ancora li loro quadrati, Ma, per essere CM, AF ordinate del diametro P*p*, il quadrato della CM sta al quadrato della AF, come il quadrato della CP al rettangolo delle due PF, *p*F. Dunque ancora il quadrato della MT sarà al quadrato della CF, come il quadrato della CP al rettangolo delle due PF, *p*F; ed in conseguenza, congiungendo insieme gl'antecedenti, e li conseguenti delle due ragioni eguali, saranno li quadrati delle due MT, CP al quadrato della CP, come il qnadrato della MT al quadrato della CF, o pure come il quadrato della CT al quadrato della CA.

158. Quindi, conforme dividendo dee essere il quadrato della MT al quadrato della CP, come il rettangolo delle due AT, BT al quadrato della CA;

CA; così permutando sarà il quadrato della MT al rettangolo delle due AT, BT, come il quadrato della CP al quadrato della CA. Ma di questi due quadrati quadrupli ne sono li quadrati delli due diametri P*p*, AB, li quali sono eguali alle figure degl' altri due M*m*, D*d*. Dunque il quadrato della tangente MT sarà al rettangolo delle due AT, BT, come la figura del diametro M*m* alla figura dell' altro D*d*, che è conjugato del diametro AB.

§. XII.

Delle secanti dell' ellisse.

159. Le rette, che incontransi coll' ellisse segandola, similmente sono, o li suoi diametri, o pure l'ordinate degli stessi diametri; ma egli è chiaro, che così l'une, come l'altre debbano segare l'ellisse in due punti. Possono intanto due secanti dell' ellisse incontrarsi ancora tra di loro; e poichè le metà di qualsisia diametro sono ordinate del suo conjugato, potrà racchiudersi in un sol teorema la proprietà del loro incontro, con dire, che se due ordinate di due diversi diametri incontransi, così tra di esse, come coll' ellisse

ellisse dall' altra parte, li rettangoli delle loro porzioni, prese dalli punti dell' ellisse per sino al punto dell' incontro, siano come le figure degli stessi diametri.

Fig. 30. 160. Siano perciò li due diametri AB, OR, le di cui ordinate, prolungate dall' altra parte per sino all'ellisse, siano Mm, Pp, ed incontrinsi queste due ordinate tra di loro nel punto E. Io dico, che il rettangolo delle porzioni della prima ME, mE sia al rettangolo delle porzioni della seconda PE, pE, come sono le figure degli stessi diametri AB, OR; ed in conseguenza, come sono li quadrati delli loro conjugati, a cui sono eguali le due figure.

161. Pongasi primieramente, che ciascuna delle due Mm, Pp passi per lo centro dell'ellisse. E siccome in questo caso intersegansi tra di loro nello stesso centro; così, facendosi eguali le porzioni di ciascuna di esse, saranno li rettangoli delle loro porzioni, come li quadrati delle stesse rette. Ma non possono le due Mm, Pp passare per lo centro dell' ellisse, se non siano conjugati delli due diametri AB, OR. Dunque li rettangoli delle loro porzioni, come proporzionali ai quadrati, che si fanno dalli conjugati delli due diametri

AB,

AB, OR, saranno come le figure degli stessi diametri.

162. Pongasi in secondo luogo, che la sola P*p* passi per lo centro dell'ellisse; e supposto, che D*d* sia il conjugato del diametro AB, si abbassino su di esso l'ordinate PQ, MS, *pq*, *ms*, a cui facciasi parallela la EF. Essendo adunque equiangoli li due triangoli CPQ, CEF, saranno proporzionali, così le rette PQ, EF, CP, CE, come li loro quadrati. Ma il quadrato della PQ sta al quadrato della EF, o sia MS, come il rettangolo delle due DQ, *d*Q al rettangolo dell'altre due DS, *ds*. Dunque, come sono questi due rettangoli, così saranno altresì li quadrati delle due CP, CE; e per tanto dividendo il rettangolo delle due DQ, *d*Q sarà al rettangolo delle due SQ, *s*Q, come il quadrato della CP al rettangolo delle due PE, *p*E. *Fig.* 30.

163. Essendo poi, per gli stessi triangoli, proporzionali così le rette CP, CE, CQ, CF, come li loro quadrati; sarà similmente dividendo il quadrato della CP al rettangolo delle due PE, *p*E, come il quadrato della CQ al rettangolo delle due QF, *q*F. Onde ancora il rettangolo delle due DQ, *d*Q sarà al rettangolo dell'altre

due

due S Q, *s* Q, come il quadrato della C Q al rettangolo delle due Q F, *q* F; e per tanto, congiungendo li termini della prima ragione colli termini della seconda, sarà il quadrato della C D al rettangolo delle due S F, *s* F, ovvero delle due M E, *m* E, come il quadrato della C Q al rettangolo delle due Q F, *q* F, o pure come il quadrato della C P al rettangolo delle due P E, *p* E.

164. Quindi, essendo li quadrati delle due D*d*, P*p* quadrupli delli quadrati delle due C D, C P; sarà altresì il quadrato della D*d* al rettangolo delle due M E,. *m* E, come il quadrato della P*p* al rettangolo delle due P E, *p* E; ed in conseguenza permutando il quadrato della D*d* sarà al quadrato della P*p*, come il rettangolo delle due M E, *m* E al rettangolo dell' altre due P E, *p* E. Ma le due D*d*, P*p* sono li conjugati delli due diametri A B, OR, onde li loro quadrati sono eguali alle figure degli stessi diametri. Dunque, come sono le figure delli due diametri A B, O R, così sarà il rettangolo delle due M E, *m* E al rettangolo dell'altre due P E, *p* E.

Fig. 31. 165. Pongasi finalmente, che nessuna delle due M*m*, P*p* passi per lo centro dell'elisse C; ed in questo caso so si dimostrerà facilmente lo stesso teorema, con tirare per lo centro C la S*s*, che passi per lo punto E, in cui intersegansi le due M*m*, P*p*. In fatti, dovendo essere per lo caso antecedente, tanto il rettangolo delle due ME, *m*E alla figura del diametro AB, quanto il rettangolo dell'altre due PE, *p*E alla figura dell'altro diametro OR, come il rettangolo delle due SE, *s*E alla figura di quel diametro, di cui è conjugato la S*s*; sarà il rettangolo delle due ME, *m*E al rettangolo dell'altre due PE, *p*E nella stessa ragione, in cui sono le figure delli due diametri AB, OR.

166. Se li due diametri AB, OR siano conjugati, sarà la P*p* parallela al primo di essi AB, ed al contrario la M*m* parallela all' altro OR; ma, quando ciò avviene, potrà dimostrarsi il teorema indipendentemente dal caso precedente, con abbassare sul diametro AB l' ordinata PQ. Imperocchè, se AH sia il parametro del diametro AB, sarà AH ad AB, come la figura del diametro AB alla figura del diametro OR. Ma nella ragione di AH ad AB sta, così il quadrato della MN al rettangolo delle due AN, BN, come il quadrato della PQ al rettangolo delle due AQ, BQ. Dunque, dovendo ancora *Fig.* 32.

cora

cora essere nella stessa ragione la differenza delli due quadrati alla differenza delli due rettangoli ; sarà il rettangolo delle due ME , *m*E al rettangolo dell' altre due PE , *p* E , come la figura del diametro A B alla figura dell' altro diametro OR .

167. Or da questo teorema delle secanti , che dee aver luogo , eziandio se le due M *m* , P *p* incontransi tra di loro fuori dell' ellisse , possono dedursi li due dimostrati di sopra intorno alle tangenti . In fatti nel secondo caso , se la
Fig. 30.
M *m* facciasi così vicina al vertice A del diametro AB , che diventi tangente dell' ellisse ; si faranno eguali le due sue porzioni M E , *m* E . Onde , non essendo differente il loro rettangolo dal quadrato di una di esse , sarà il quadrato della tangente al rettangolo delle due porzioni del diametro P*p* , con cui la stessa tangente s' incontra , come la figura del diametro A B , che ha per vertice il punto del contatto, alla figura del diametro O R , di cui è conjugato l' altro P *p* .

Fig. 31.
168. E così ancora nel terzo caso , se le due M *m* , P *p* faccians così vicine ai vertici A, ed O delli due diametri A B , O R , che diventino tangenti dell' ellisse ; si faranno eguali tra di loro , così le porzioni della prima

M E ,

ME, *m*E, come le porzioni della seconda PE, *p*E. Onde, non essendo differenti li loro rettangoli dalli quadrati delle due rette, che incontransi tra di loro, e toccano l'ellisse nelli due vertici A, ed O; saranno li quadrati di queste due tangenti, come le figure delli due diametri AB, OR, che hanno per loro vertici li due punti del contatto.

169. Dallo stesso teorema intanto può dedursi altresì, che incontrandosi una tangente con un' ordinata di un qualche diametro, prolungata dall'altra parte per fino all' ellisse, debba essere il quadrato della tangente al rettangolo delle due porzioni dell' ordinata prolungata, come la figura del diametro, che ha per vertice il punto del contatto, alla figura dell' altro diametro, a cui rapportasi l' ordinata. Ma, per dimostrarlo indipendentemente dal riferito teorema, sia AE la retta, che toccando l' ellisse nel vertice A del diametro AB, incontrasi nel punto E colla P*p* ordinata prolungata del diametro OR. Io dico, che il quadrato della AE sia al rettangolo delle due PE, *p*E, come la figura del diametro AB alla figura dell' altro OR. *Fig.* 33.

170. Per lo centro C tirisi il diametro S*s*, che passi prolungato per lo

punto E, in cui la tangente AE incontrasi colla P*p*; ed il quadrato della tangente AE sarà al rettangolo delle due SE, *s* E, come la figura del diametro AB alla figura di quel diametro, di cui S*s* è conjugato. Ma per lo secondo caso del teorema dimostrato il rettangolo delle due SE, *s*E sta al rettangolo dell' altre due PE, *p*E, come la figura del diametro, di cui S*s* è conjugato, alla figura del diametro OR, a cui rapportasi l'ordinata prolungata P*p*. Dunque ordinando il quadrato della tangente AE sarà al rettangolo delle due PE, *p*E, come la figura del diametro AB alla figura del diametro OR.

171. Del rimanente dal teorema dimostrato ricavasi, che possa il cerchio segare l'ellisse, non solo in due, ma an-
Fig. cora in quattro punti. In fatti, se li
31. due diametri AB, OR siano egualmente distanti da uno delli due assi; saranno eguali, così li loro parametri, come le loro figure. Onde, facendosi il rettangolo delle due ME, *m* E eguale al rettangolo dell' altre due PE, *p*E; il cerchio, che passa per gli tre punti P, M, *p*, passerà ancora per lo quarto *m*. Ma, siccome ciò avviene, qualora le distanze delli due diametri AB, OR da uno delli due assi sono egua-

eguali tra di loro; così da questo stesso può dedursi, che non possa il cerchio segare l'ellisse in più di quattro punti.

172. Se poi, essendo li due diametri AB, OR egualmente distanti da uno delli due assi, delli quattro punti uniscansi insieme li due M, ed *m* nel vertice A del diametro AB, e formino ivi un punto di contatto; in tal caso il cerchio s' incontrerà coll' ellisse in modo, che segandola negl' altri due P, e *p*, la toccherà nel punto A. E se quest' altri due punti P, e *p* congiungansi ancora insieme nell' altro vertice O del diametro OR, e formino ivi un altro punto di contatto; lo stesso cerchio s' incontrerà talmente coll'ellisse, che senza segarla la toccherà nelli due punti A, ed O. Onde si vede, che, se bene il cerchio possa segare l'ellisse, così in due, come in quattro punti; nientedimeno sia impossibile, che il loro intersegamento facciasi in tre punti.

173. In fatti, se un cerchio seghi l' ellisse nelli tre punti M, P, *p*, e congiunti li due P, e *p* per la retta P*p*, ritrovisi il diametro OR, che seghi la P*p* per metà; potrà ritrovarsi un' altro diametro AB, che sia tanto distante da uno delli due assi dell' ellisse, per quanto dista da esso il dia-

metro OR. Onde, se MN sia ordinata di quest' altro diametro, che s'incontri prolungata, così colla Pp nel punto E, come coll' ellisse nel punto m; sarà il rettangolo delle due ME, mE eguale al rettangolo dell' altre due PE, pE; e pertanto il cerchio segherà l' ellisse ancora nel punto m.

174. Qualora dunque un cerchio incontrasi coll' ellisse in tre punti, uno di essi dovrà essere punto di contatto, che equivale a due punti d'intersegamento; e si distinguerà un tal punto dagl' altri due per mezzo del diametro, tirato allo stesso punto, che dee essere tanto distante da uno delli due assi, per quanto dista da esso l' altro diametro, che divide per metà la retta, che congiunge insieme gl' altri due punti; ed in una maniera consimile potrà conoscersi, se li due punti, in cui incontrasi tal volta un cerchio coll' ellisse, siano punti d' intersegamento, o pure di contatto; ma se mai l'incontro di un cerchio coll'ellisse facciasi in un sol punto, non è da porsi in dubbio, che egli sia punto di contatto.

§.XIII.

§. XIII.

De' due fochi dell' ellisse.

175. TErmineremo le proprietà dell' ellisse con quelle delli due fochi, che in essa consideransi. Chiamansi con questo nome li due punti dell' asse maggiore, a cui se tirinsi l'ordinate, ciascuna di esse si fa eguale alla metà del parametro dello stesso asse. Così, se A B sia l' asse maggiore dell' ellisse, e ciascuna delle due ordinate EF, *e f* sia eguale alla metà del suo parametro A H; li due punti F, ed *f* diconsi essere fochi dell'ellisse, per una proprietà loro speciale, che da quì a poco sarà da noi dimostrata. Onde, essendo eguali tra di loro le due ordinate E F, *e f*, saranno li due fochi F, ed *f* egualmente distanti, così dal centro C, come dalli due vertici dell' asse A, e B. *Fig.* 34.

176. Dall' essere ciascuna delle due ordinate E F, *e f* eguale alla metà del parametro A H, ne segue, che li due fochi F, ed *f* dividano l' asse A B in modo, che tanto il rettangolo delle due A F, B F, quanto il rettangolo dell' altre due A *f*, B *f* sia eguale alla quarta parte della figura dello stesso asse.

In fatti il quadrato dell' ordinata EF sta al rettangolo delle due AF, BF, come il parametro AH all' asse AB, o pure come il quadrato del parametro AH alla figura dello stesso asse AB. Onde, siccome il quadrato dell' ordinata EF è eguale alla quarta parte del quadrato del parametro AH; così ancora il rettangolo delle due AF, BF sarà eguale alla quarta parte della figura dell' asse AB.

177. Quindi, se D*d* sia l' asse minore dell' ellisse, e congiungansi le due DF, D*f*; ciascuna di esse sarà eguale alla metà dell' asse maggiore AB. Imperocchè, essendo la figura dell' asse maggiore AB eguale al quadrato dell' altro minore D*d*, sarà il rettangolo delle due AF, BF eguale al quadrato della CD; onde, coll' aggiunta del comune quadrato della CF, saranno eguali li quadrati delle due CA, DF; ed in conseguenza la DF sarà eguale alla CA: dimodochè, se col punto D, come centro, e coll' intervallo della metà dell' asse maggiore CA descrivasi un' arco circolare, coll' intersegamento di quest' arco collo stesso asse si avranno li due fochi dell' ellisse.

178. Se poi la IL sia tangente dell' ellisse in un qualche punto M, e la medesima s' incontri coll' altre due AI,

BL

BL, alzate perpendicolarmente sull'asse A B; secondo è stato altrove dimostrato (147), ancora il rettangolo delle due A I, B L dee essere eguale al quadrato della CD. Onde, facendosi questo stesso rettangolo eguale altresì al rettangolo delle due A F, B F, si potrà da questa stessa uguaglianza facilmente dedurre, che se congiungasi il foco F colli due punti I, ed L per le rette FI, FL, sia retto l'angolo IFL, contenuto da queste rette; ed in conseguenza, che li due fochi F, ed *f* possano determinarsi ancora, con descrivere un mezzo cerchio sulla IL, come diametro.

179. In fatti, essendo il rettangolo delle due A I, B I eguale al rettangolo dell'altre due AF, BF, sarà AI ad AF, come BF a BL. Onde, facendosi equiangoli li due triangoli IAF, FBL, sarà l'angolo A I F eguale all' angolo BFL; e pertanto, coll'aggiunta del comune A F I, saranno li due angoli A I F, A F I eguali ancora agl'altri due B F L, A F I. Ma, per essere retto l' angolo F A I, li due insieme A I F, A F I formano un altro retto. Dunque ancora gl' altri due B F L, A F I formeranno insieme un' angolo retto; ed in conseguenza l'angolo IFL,

ſituato in mezzo ad eſſi, ſimilmente ſarà retto.

180. Da ciò poi, che il mezzo cerchio, deſcritto ſulla IL come diametro, debba paſſare per gli due fochi F, ed f, ne ſegue, che ſe dal punto P, in cui interſeganſi le due If, LF, ſi abbaſſi ſulla tangente IL la perpendicolare PM, queſta debba dividerla nella ragione dell' altre due AI, BL. Imperocchè, eſſendo l'angolo BFL eguale, così all' angolo AIF, come all'angolo PIM; ſaranno eguali tra di loro queſti due angoli. Onde, facendoſi equiangoli li due triangoli IAF, IMP, ſarà AI ad MI, come FI a PI. Per la ſteſſa ragione ſarà ancora BL ad ML, come fL a PL; e per tanto, eſſendo FI a PI, come fL a PL, ſarà AI ad MI, come BL ad ML.

181. Eſſendo così, la perpendicolare, che ſi abbaſſa dal punto P ſulla tangente IL, dovrà cadere propriamente ſul punto del contatto M, per la ragione, che in queſto punto rimane diviſa la IL nella ragione delle due AI, BL, In fatti, per quel tanto è ſtato dimoſtrato (153), ſe Mm ſia il diametro, che ha per uno de' ſuoi vertici il punto del contatto M, ſaranno tanto li quadrati delle due AI, MI, quanto li quadrati dell'altre due BL, ML,

come

come la figura dell' asse AB alla figura del diametro M*m*. Onde, dovendo essere li quadrati delle due AI, MI nella stessa ragione colli quadrati dell' altre due BL, ML, sarà AI ad MI, come BL ad ML.

182. Or dall' essere la PM, che congiunge il punto P col punto del contatto M, perpendicolare sulla tangente IL, ne segue, che le due MF, M*f* tirate dallo stesso punto del contatto M ai due fochi F, ed *f*, debbano formare angoli eguali colla stessa tangente. In fatti, essendo retto, così l' angolo PMI, come l' angolo PFI; il cerchio descritto sulla PI, come diametro, dovrà passare per gli due punti M, ed F; e per tanto l'angolo IMF sarà eguale all' angolo IPF. Per la stessa ragione ancora l' angolo LM*f* sarà eguale all' angolo LP*f*; onde, essendo eguali tra di loro li due angoli IPF, LP*f*, saranno eguali altresì gl' altri due IMF, LM*f*.

183. Per essere eguali li due angoli IMF, LM*f*, chiaro si è, che la perpendicolare MS, alzata sulla tangente IL dal punto del contatto M, debba dividere, non solo per metà l' angolo FM*f*, ma ancora la distanza delli due fochi F*f* talmente nel punto S, che SF sia ad S*f*, come MF ad M*f*; ma dall'

dall' uguaglianza degli ſteſſi angoli è derivato altresì, che li due punti F, ed *f* ſianſi chiamati fochi: come in fatti, ſe colla rivoluzione dell' arco ellittico AM intorno all' aſſe AB formiſi un ſpecchio concavo, li raggi di luce, che cadono ſulla ſua ſuperficie da un corpo lucido, ſituato nel punto *f*, attenta la riferita uguaglianza, dovranno rifletterſi in modo, che tutti ſi riuniſcano nell'altro punto F.

Fig. 35. 184. Alle ſteſſe rette MF, M*f*, che tirate dal punto del contatto M formano angoli eguali colla tangente IL, compete ancora un' altra proprietà; e ſi è, che le medeſime unite inſieme ſiano eguali all' aſſe AB; ma per dimoſtrarla, fa duopo prima far vedere, che ſe per lo centro dell'ellíſſe C tiriſi la CO parallela ad una di eſſe MF, che s' incontri colla tangente IL nel punto O, ſia la CO eguale alla metà dello ſteſſo aſſe. Facciaſi perciò la *f*R parallela alla ſteſſa MF; ed eſſendo l' angolo IMF eguale, così all' angolo RM*f*, come all'angolo MR*f*, ſaranno eguali tra di loro queſti due angoli; e per tanto, facendoſi iſoſcele il triangolo M*f*R, ed eſſendo eguali le due MO, RO, ſarà la *f*O perpendicolare ſulla tangente IL.

185. Quindi, dovendo il cerchio, de-

descritto sulla L*f*, come diametro, passare per gli due punti B, ed O; sarà l'angolo BOL eguale all'angolo B*f*I. E similmente, dovendo il cerchio, descritto sulla I*f*, come diametro, passare per gli due punti A, ed O; sarà l'angolo AOI eguale all'angolo A*f*L. Onde, facendosi eguali ancora li due di mezzo AOB, I*f*L, ed essendo l' angolo I*f*L retto, sarà retto altresì l' angolo AOB; ed in conseguenza, conforme descrivendosi un mezzo cerchio sull' asse AB, come diametro, dee egli passare per lo punto O; così la CO sarà eguale alla sua metà CA, ovvero CB.

186. Posto ciò, egli è facile ora il dimostrare, che le due MF, M*f* insieme siano eguali all'asse AB. Incontrisi perciò la CO colla M*f* nel punto Q; ed essendo equiangoli, così li due triangoli MF*f*, QC*f*, come gl' altri due MR*f*, MOQ; chiaro si è, che sia dupla, tanto la MF della CQ, quanto la *f*R, o sia M*f* della OQ; onde le due insieme MF, M*f*, come duple della CO, saranno eguali all'asse AB. Conforme poi questa proprietà dee aver luogo, ovunque prendasi nell' ellisse il punto M; così per rapporto ai due vertici A, e B ricavasi ella da ciò, che essendo la AF eguale alla B*f*,

così le due AF, A*f*, come le due BF, B*f* debbono essere insieme eguali all' asse AB.

187. Attenta una tal proprietà, se sia dato l' asse dell' ellisse AB insieme colli due fochi F, ed *f*, potrà ella descriversi in un'altra maniera, molto più facile ad eseguirsi, ed ecco come. Prendasi un filo talmente lungo, che attaccato colle due sue estremità ai due fochi F, ed *f*, resti eguale all'asse AB; indi per mezzo di un stile conducasi lo stesso filo intorno agli stessi fochi in modo, che le due sue porzioni MF, M*f*, le quali variano continuamente, restino tese. E siccome dallo stesso stile si segnerà nel piano una curva, in cui le rette MF, M*f*, tirate da qualsisia suo punto M ai due fochi F, ed *f*, saranno insieme eguali all'asse AB; così questa stessa curva sarà l' ellisse, che si dimanda.

Fig. 36.

188. Alle medesime rette MF, M*f* tirate dal punto del contatto M ai due fochi F, ed *f*, compete altresì una terza proprietà; e si è, che il loro rettangolo sia eguale alla quarta parte della figura del diametro, che ha per uno de' suoi vertici il punto M. Si abbassi perciò dal foco F sulla tangente IL la perpendicolare FO, con cui vadasi ad incontrare la M*f*, prolungata verso

Fig. 37.

verso M, nel punto R; e facendosi eguali li due angoli IMF, IMR, faranno eguali ancora, così le due MF, MR, come le due FO, RO. Onde il cerchio, che descrivesi sulla IL come diametro, passerà non solo per lo punto F, ma ancora per lo punto R; e per tanto il rettangolo delle due MR, M*f*, o pure delle due MF, M*f*, come eguale al rettangolo dell' altre due MI, ML, sarà eguale alla quarta parte della figura del diametro M*m*.

189. Vedesi intanto, che se la M*f* si prolunghi a dirittura verso R, conforme la tangente IL dividê per metà l' angolo FMR; così, se facciasi la MR eguale alla MF, la stessa tangente debba dividere ancora per metà, e ad angoli retti la FR. Se poi per lo foco F tirisi la FG parallela alla tangente IL, che s' incontri colla M*f* nel punto G; chiaro si è, che siano eguali le due MF, MG. Onde la perpendicolare MS alzata dal punto del contatto M sulla tangente IL, siccome divide l' angolo FM*f* in parti eguali, così dovrà dividere altresì per metà, e ad angoli retti la FG.

190. Ma, conforme con tirare la FG parallela alla tangente IL, che s' incontri colla M*f* nel punto G, si fanno eguali le due MF, MG; così anco-

ancora il rettangolo delle due MG, Mf dovrà essere eguale alla quarta parte della figura del diametro Mm. Se poi la stessa MG incontrisi col diametro Mm nel punto K, saranno le due sue porzioni MK, mK nella stessa ragione colle due MF, Mf. In fatti, se congiungasi la mF, saranno eguali, e parallele le due Mf, mF; onde, siccome sono eguali li due angoli IMF, MFK, così saranno eguali ancora li due LMf, mFK; e per tanto, essendo l'angolo MFm diviso per metà dalla FK, sarà MK ad mK, come MF ad mF, o sia Mf.

Fig. 38. 191. Per dimostrare finalmente un'altra proprietà delli due fochi dell'ellisse, prolunghisi l'asse AB verso uno delli due vertici, come verso A, talmente per fino al punto G, che siano continuamente proporzionali le tre CF, CA, CG; e sulla BG elevisi la perpendicolare GK, che riguardasi come direttrice dell'ellisse. Essendo adunque CA a CG, come CF a CA, conforme con togliere li termini della seconda ragione dalli termini della prima, dee essere AF ad AG, come CF a CA; così, se congiunganzi insieme gli stessi termini, sarà BF a BG, come CF a CA.

192. Or una tal proprietà ha luogo per

per rapporto ad ogni punto dell'ellisse, cioè, che se da un punto di essa M tirisi così la MF al foco F, come la MK perpendicolare sulla direttrice GK, sia MF ad MK, come CF a CA, o pure come la distanza Ff delli due fochi all'asse AB. In fatti, per ragion della perpendicolare MS, che divide per metà l' angolo FMf, dee essere MF ad Mf, come SF ad Sf. Onde, conforme componendo MF sta alla somma delle due MF, Mf, ovvero all' asse AB, come SF ad Ff; così, prendendo le metà delli due conseguenti sarà MF a CA, come SF a CF; ed in conseguenza permutando MF sarà ad SF, come CA a CF.

193. Essendo poi AH il parametro dell' asse AB, e Dd l' altro asse dell' ellisse; per la stessa perpendicolare MS, dee essere SN a CN, come AH ad AB, o pure come il quadrato della CD al quadrato della CA. Onde, conforme dividendo CS sta a CN, come il quadrato della CF al quadrato della CA, o pure come CF a CG; così, togliendo li termini della prima ragione dalli termini della seconda, sarà SF ad NG, come CF a CG. Ma era MF ad SF, come CA a CF. Dunque ordinando sarà MF ad NG, come CA a CG, o pure come CF a CA;

e per

e per tanto, essendo eguali le due NG, MK, ancora MF ad MK sarà nella stessa ragione di CF a CA.

194. Del rimanente egli è facile ad intendersi, che la distanza delli due fochi Ff sia mezza proporzionale tra la somma delli due assi, e la loro differenza; dal che ne segue, che quanto meno differiscono tra di loro li due assi, tanto minore debba essere la distanza delli due fochi: come in fatti, se mai li due assi facciansi eguali, e colla loro uguaglianza l'ellisse cambiasi in circonferenza di cerchio; svanirà interamente la riferita distanza, e li due fochi si riuniranno col centro. La ragione poi, per cui consideransi li due fochi soltanto nell'asse maggiore dell'ellisse, dee ripetersi da ciò, che solamente in esso possono aversi due ordinate, di cui ciascuna sia eguale alla metà del suo parametro.

§. XIV.

§. XIV.

Degl' altri diametri dell' iperbole.

195. Restano finalmente a dimostrarsi l'altre proprietà dell' iperbole, di cui moltissime sono simili a quelle dell'ellisse, e dimostransi presso a poco in una maniera quasi consimile; onde, per quanto a queste proprietà, basterà riferirle con quel medesimo ordine, con cui si sono dimostrate nell'ellisse. Per incominciare adunque *Fig.* dagl' altri diametri dell' iperbole, anco- *39.* ra in essa si vuol notare, che se dividasi il suo asse AB per metà nel punto C, ogn'altra retta D*d*, che tirata per questo punto terminasi alle due iperboli opposte, resti eziandio divisa per metà nello stesso punto; e quindi si è, che ancora nell'iperbole siasi dato al punto C il nome di centro.

196. Colle rette poi, che tirate per lo centro C terminansi alle due iperboli opposte, si hanno parimente gl' altri loro diametri; e per dimostrarlo, fa duopo ancora premettere un teorema simile a quello, di cui si ebbe bisogno per la ricerca degl' altri diametri dell' ellisse: cioè, che se la D*d* tirata per lo centro C, divida per metà nel punto

to E l' altra AM, tirata dal vertice A per ſino alla ſteſſa iperbole, in cui ritrovaſi quel vertice, e dal punto D ſi abbaſſi ſull' aſſe AB l' ordinata DF, ſia CE, a CD, come CF a CA.

197. Da queſto teorema, che dimoſtraſi come nell'ellisse, ricavanſi le ſteſſe conſeguenze; e ſono I, che ſe dalli punti A, e D tirinſi le rette AK, DL parallele alle due DF, AE, di cui la prima s' incontri colla D*d* nel punto K, e la ſeconda coll' aſſe AB nel punto L; ſiano li due triangoli DFL, AEK eguali ai due trapezj AFDK, AEDL. II, che ſe nella ſteſſa iperbole prendaſi un' altro punto P, da cui tirinſi le rette PQ, PR parallele alle ſteſſe due AE, DF, che s' incontrino coll' aſſe AB ne' punti Q, ed R, e colla D*d* ne' punti O, ed S; ſia il triangolo PRQ eguale al corriſpondente trapezio ARSK. E III finalmente, che il triangolo PSO, formato dalle ſteſſe due PQ, PR colla D*d*, ſia eguale al trapezio QODL, che ad eſſo corriſponde.

198. Ricavate dal premeſſo teorema queſte conſeguenze, primieramente ſi dimoſtrerà, che la D*d*, tirata per lo centro C, ſia diametro dell' iperbole, cioè, che divida per metà, non ſolo la AM, ma ogn' altra retta P*p*, che tiriſi

tirisi dentro dell' iperbole parallela alla A M; ed indi si farà vedere, che il diametro D d abbia la stessa proprietà dell' asse A B, cioè, che li quadrati delle due sue ordinate A E, P O siano tra di loro, come il rettangolo delle due porzioni D E, d E al rettangolo dell' altre due D O, d O; e le dimostrazioni, così di quelle tre conseguenze, come di questi due nuovi teoremi, saranno simili a quelle dell' elisse.

199. Se poi la DV parallela all'ordinate A E, P O sia di tal lunghezza, *Fig.* 40.
che il quadrato di ciascuna dell' ordinate sia al rettangolo delle due porzioni del diametro, prese dalli due vertici, e corrispondenti alla stessa ordinata, come D V a D d; sarà la D V il parametro del diametro Dd, ed il rettangolo delle due D V, D d sarà la figura dello stesso diametro. E conforme, congiungendosi la dV, ed incontrandosi con essa l' ordinata P O nel punto X, pure dee essere il quadrato della stessa PO eguale al rettangolo delle due DO, O X; così eziandio si dimostrerà, che la figura dell' asse A B sia alla figura del diametro D d, come sono li quadrati delle loro ordinate D F, A E.

200. Si vuol però quì notare, che la stessa D d sia diametro altresì dell' iperbole opposta Bm; cioè, che divida an-

ancora per metà le rette, che tiransi dentro di essa parallele alla AM; ed in oltre, che li quadrati di quest' altre sue ordinate siano similmente, come li rettangoli delle porzioni della stessa D*d*, prese dalli due vertici, e corrispondenti alle stesse ordinate. Ed in fatti, se congiungasi la CM, e la medesima distendasi per sino a che s' incontri coll' iperbole opposta nel punto *m*; per essere eguali, così le due CB, CA, come le due C*m*, CM, sarà CB a C*m*, come CA a CM; onde, conforme, congiunta la B*m*, si fanno equiangoli li due triangoli CB*m*, CAM, così saranno parallele le due B*m*, AM.

201. Se poi prolunghisi il diametro D*d* per sino a che s' incontri colla B*m* nel punto *e*; saranno equiangoli altresì, così li due triangoli CB*e*, CAE, come li due C*me*, CME. Onde, dovendo essere, tanto B*e* ad AE, quanto *me* ad ME nella ragione di C*e* a CE; sarà B*e* ad AE, come *me* ad ME; e per tanto, conforme sono eguali le due AE, ME, così saranno eguali ancora le due B*e*, *me*. Quindi, se sull' asse AB si abbassi l' ordinata *df*, potrà dimostrarsi similmente, che C*d* sia a C*e*, come CB a C*f*. Onde colle conseguenze, che da ciò ricavansi, potrà dimostrarsi altresì, che

il

il diametro Dd divida per metà ogn' altra retta, che nell' iperbole opposta tirasi parallela alla Bm; e che li quadrati di quest' altre sue ordinate siano eziandio, come li rettangoli delle sue porzioni, prese dalli due vertici, e corrispondenti alle stesse ordinate.

202. Del rimanente, comunque in una delle due iperboli opposte tirisi la Pp, siccome dal vertice A dell' asse AB si può sempre tirare dentro di una di esse la AM parallela alla Pp; così sempre dovrà esservi un diametro, che seghi per metà, tanto la AM, quanto la Pp. Quindi, se siano date nel piano le sole due iperboli opposte AM, Bm, conforme con tirare dentro di esse due rette parallele Pp, Qq, e con dividerle per metà ne' punti O, ed R, dee essere la Dd, che passa per questi due punti, uno de'loro diametri; così, se dividasi la stessa Dd ancora per metà nel punto C, sarà questo punto il centro delle due iperboli opposte, per cui dovranno passare tutti gl' altri loro diametri. *Fig. 41.*

203. Se il diametro ritrovato Dd seghi le due Pp, Qq ancora ad angoli retti, chiaro si è, che egli sia l' asse delle due iperboli; ma, segandole obbliquamente, potrà determinarsi l'asse, con descrivere col centro C, e coll' in-

intervallo della CD l' arco circolare DM, che seghi la stessa iperbole, in cui ritrovasi il vertice D del diametro D*d*, nel punto M; poichè, congiunta la DM, ed abbassata su di essa dal centro C la perpendicolare CF, che s' incontri colle due iperboli opposte ne' punti A, e B, sarà la AB il loro asse, per la ragione, che divide per metà, e ad angoli retti, tanto la DM, quanto ogn'altra retta, tirata in ciascuna delle due iperboli parallela alla DM.

204. Ed in fatti, avendo ogn' altro diametro delle due iperboli opposte la stessa proprietà dell' asse, non solo nella maniera riferita di sopra potranno descriversi nel piano, essendo dato qualsisia loro diametro insieme col suo parametro, e colla posizione delle sue ordinate; ma il teorema enunciato intorno all'asse, con tutte le conseguenze, che da esso ricavansi, dovrà aver luogo ancora per rapporto ad ogn' altro diametro; onde non è da porsi in dubbio, che la AB divida per metà, e ad angoli retti, non solo la DM, ma ancora ogn' altra retta, che in ciascuna delle due iperboli tirasi parallela alla stessa DM.

205. Per la stessa ragione, se di un diametro dell' iperbole, come D*d*, sia nota le posizione delle sue ordinate, po-

potrà facilmente determinarsi la posizione dell'ordinate di qualsisia altro diametro A B. Si abbassi perciò sul primo Dd dal vertice dell' altro AB l'ordinata A E; e se da quest' altro taglisi la porzione D F in modo, che C F sia a CA, come CE a CD, sarà la DF una delle sue ordinate; e si avrà in appresso il suo parametro, se prolungata la D F talmente per fino al punto G, che siano continuamente proporzionali le tre AF, DF, FG, tirisi per lo suo vertice A la A H parallela alla stessa DF, che vadasi ad incontrare colla BG nel punto H.

§. XV.

Delli diametri conjugati dell' iperbole.

206. LI diametri dell'iperbole similmente hanno li loro conjugati, che sono le rette tirate per lo centro parallele alle loro ordinate; ma, non terminandosi questi loro conjugati alle due iperboli opposte, fa duopo, definirne la lunghezza, a simiglianza di quelli dell' ellisse. Se adunque A B sia *Fig.*
un diametro dell' iperbole, che abbia 42.
per parametro la AH; e tirata per lo centro C la D d parallela alle sue ordinate MN, mn, faccinsi le due CD, C d

Cd talmente eguali tra di loro, che la tutta Dd sia mezza proporzionale tra il diametro AB, ed il suo parametro AH; sarà Dd il conjugato del diametro AB, onde a simiglianza di ciò, che è stato dimostrato nell' ellisse, eziandio il suo quadrato sarà eguale alla figura dello stesso diametro.

207. Ed in vero, quantunque la D*d* non si termini alle due iperboli opposte, ma estendasi all'infinito, senza incontrarle; nientedimeno ancora essa merita il nome di diametro, per la ragione, che divide per metà le rette, che tiransi tra le stesse iperboli parallele al diametro principale AB. In fatti, se M*m* sia una di queste rette, divisa dalla Dd nel punto O, e dalli suoi termini si abbassino su 'l diametro AB le ordinate MN, *mn*; per essere eguali li quadrati di queste due ordinate, sarà il rettangolo delle due AN, BN eguale al rettangolo dell' altre due A*n*, B*n*. Onde, con aggiungere ad essi li quadrati similmente eguali delle due CA, CB, sarà il quadrato della CN eziandio eguale al quadrato dell' altra C*n*; e per tanto, facendosi eguali le due CN, C*n*, saranno eguali altresì l' altre due MO, *m*O.

208. Le metà adunque di queste rette debbonsi avere, come ordinate del con-

conjugato D*d*; e se la DI sia di lunghezza tale, che al contrario il diametro AB sia mezzo proporzionale tra il suo conjugato D*d*, e la DI; sarà questa DI il parametro del conjugato D*d*, e la figura dello stesso conjugato sarà il rettangolo delle due D*d*, DI. Ma, siccome D*d* è il conjugato del diametro AB, così al contrario AB dovrà aversi come conjugato del diametro D*d*; onde li due diametri AB, D*d*, considerati insieme, si diranno essere conjugati tra esso loro; ed in questa guisa la figura di ciascuno di essi sarà eguale al quadrato del suo conjugato.

209. Quindi ancora nell' iperbole, se due diametri conjugati pongansi in mezzo ai loro parametri, si avranno con essi quattro rette continuamente proporzionali. Onde, siccome la figura di qualsisia diametro è eguale al quadrato del suo conjugato; così il rettangolo di due diametri conjugati sarà eguale al rettangolo delli loro parametri. Ed in oltre, conforme un diametro è maggiore, o minore del suo conjugato, secondochè è maggiore, o minore del suo parametro; così, se un diametro sia maggiore, o minore del suo parametro, dovrà essere al contrario il suo conjugato minore, o maggiore del pa-

rametro, che ad esso compete.

210. Ancora l'asse dell'iperbole dee avere il suo conjugato; e poichè le sue ordinate insistono su di esso eziandio ad angoli retti, sarà egli un'altro asse dell'iperbole, per rapporto al quale il primo asse sarà similmente maggiore, o minore, secondochè è maggiore, o minore del suo parametro. Niente però vieta, che in una qualche iperbole li due assi siano eguali, così tra di loro, come colli loro parametri; ma, secondo si vedrà da quì a poco, con questa uguaglianza non avviene altro cambiamento nell'iperbole, se non che ogn'altro diametro si fa eziandio eguale al suo conjugato; onde si è, che facendosi li due conjugati eguali altresì ai loro parametri, siano eguali li lati delle loro figure, per la quale uguaglianza l'iperbole chiamasi equilatera.

211. Egli è vero, che nell'ellisse, con essere eguali li due assi, si fanno eguali ad essi tutti gl'altri diametri, onde l'ellisse stessa cambiasi in circonferenza di cerchio; ma ciò avviene per la ragione, che nell'ellisse di tutti li diametri il massimo è l'asse maggiore, ed il minimo l'asse minore: quandochè nell'iperbole, non solo l'asse è il minimo di tutti li diametri, ma ancora l'asse conjugato è il minimo di tutti gl'

gl' altri diametri conjugati. Vedesi intanto, che la circonferenza del cerchio debbasi avere, come un' ellisse equilatera; e che l' iperbole, ad essa corrispondente, sia similmente l'iperbole equilatera.

212. Or siccome dalla configurazione stessa dell' iperbole chiaramente ricavasi, che l' asse sia il minimo di tutti li diametri; così, attenta la stessa configurazione, nè pure è da porsi in dubbio, che degl' altri diametri il più vicino all' asse sia minore del più lontano, e che due diametri egualmente distanti dall' asse siano tra di loro eguali. Con aumentarsi intanto il diametro, eziandio il suo parametro dee ricevere maggior aumento. Onde, per quanto tocca ai parametri, similmente il minimo di tutti sarà il parametro dell' asse; degl' altri poi il parametro del diametro più vicino all' asse sarà minore del parametro, che rapportasi al diametro più lontano; e finalmente, essendo due diametri egualmente distanti dall' asse, saranno eguali li loro parametri.

213. Lo stesso ordine osservasi ancora, così tra li conjugati degli stessi diametri, come tra li parametri di questi conjugati, se non che, secondo l' avvertimento già fatto, essendo li pri-

mi diametri maggiori, o minori delli loro parametri, debbono al contrario li conjugati di eſſi eſſere minori, o maggiori delli parametri, che rapportanſi agli ſteſſi conjugati. E quantunque li conjugati, per non terminarſi alle due iperboli oppoſte, ſiano effettivamente diſgiunti dalli primi diametri; nientedimeno ſi vedrà in appreſſo, che la loro ſeparazione ſi fa, come nell'elliſſe, per mezzo di due diametri, che eſſendo tra eſſo loro conjugati, ſono eguali, tanto tra di eſſi, quanto colli loro parametri.

Fig. 214. Notiſi quì intanto, che quan-
42. tunque li conjugati delli diametri delle due iperboli oppoſte AM, B*m* abbiano ancora le loro ordinate; nientedimeno incontraſi qualche divario nella proprietà, che ad eſſi compete per rapporto alle ſteſſe ordinate, il quale divario appunto deriva dal non terminarſi li conjugati alle ſteſſe iperboli AM, B*m*. In fatti nel diametro AB il quadrato della ſua ordinata MN ſta al rettangolo delle due AN, BN, o ſia alla differenza tra li quadrati delle due CN, CA, come AH ad AB; ma nel conjugato D*d* il quadrato della ſua ordinata MO ſta, non già alla differenza, ma alla ſomma delli quadrati delle due CO, CD, come DI a D*d*.

215.

215. Ed in vero, essendo li quadrati delle due CD, CA, come AH ad AB; sarà il quadrato della MN alla differenza tra li quadrati delle due CN, CA, come il quadrato della CD al quadrato della CA. Onde, congiungendo li termini della prima ragione colli termini della seconda, saranno li quadrati delle due MN, CD, ovvero delle due CO, CD al quadrato della CN, o sia MO, similmente come il quadrato della CD al quadrato della CA. Ma, per essere la AB mezza proporzionale tra le due DI, D*d*, questi due quadrati sono tra di loro, come D*d* a DI. Dunque ancora li quadrati delle due CO, CD saranno al quadrato della MO, come D*d* a DI; e per tanto invertendo il quadrato della MO sarà alla somma delli quadrati delle due CO, CD, come DI a DL.

216. Del rimanente, comunque tra le due iperboli opposte AM, B*m* tirisi la M*m*, conforme in esse dee esservi sempre un diametro, a cui la M*m* sia parallela; così il suo conjugato dividerà per metà, tanto la M*m*, quanto ogn' altra retta, tirata tra le stesse iperboli parallela alla M*m*. Onde, se M*m*, P*p* siano due rette parallele, e le medesime dividansi per

metà ne' punti O, ed R; la D*d*, che passa per questi punti, sarà diametro conjugato. E quantunque, per non esser noti li suoi vertici, non si possa con esso determinare il centro delle due iperboli; nientedimeno, se ritrovisi un' altro conjugato, si avrà il centro coll' intersegamento di ambidue.

§. XVI.

Delle iperboli, che chiamansi conjugate.

217. Fig. 43. QUantunque li conjugati delli diametri delle due iperboli opposte AM, B*m* non si terminino alle stesse iperboli; nientedimeno colli loro vertici si hanno due altre iperboli opposte, che diconsi essere conjugate delle due prime. Per dimostrarlo, sia P*p* il conjugato dell' altro diametro M*m*, e siano ancora AE, PR ordinate delli due M*m*, D*d*. Io dico primieramente, che CA sia a CN, come CD a CR. In fatti, li quadrati delle due ordinate MN, AE, come proporzionali alle figure delli due diametri AB, M*m*, sono come li quadrati delli loro conjugati D*d*, P*p*, o pure delle due CD, CP; onde MN sarà ad AE, come CD a CP. Ma, tirata

tirata la EF parallela alla MN, AE ſta ad EF, come CP a CR. Dunque ordinando ſarà MN ad EF, come CD a CR; e pertanto, eſſendo MN ad EF, come CM a CE, o pure come CA a CN, ſarà CA a CN, come CD a CR.

218. Io dico in ſecondo luogo, che il quadrato dell' ordinata MN ſia eguale al rettangolo delle due DR, *d*R. Imperocchè, eſſendo proporzionali le quattro CA, CN, CD, CR, ſaranno proporzionali ancora li loro quadrati; ed in conſeguenza, ſiccome dividendo il quadrato della CA dee eſſere al rettangolo delle due AN, BN, come il quadrato della CD al rettangolo delle due DR, *d*R; così invertendo ſarà il rettangolo delle due AN, BN al quadrato della CA, come il rettangolo delle due DR, *d*R al quadrato della CD. Ma, per l' iperbole, il quadrato della MN ſta al rettangolo delle due AN, BN, come il quadrato della CD al quadrato della CA. Dunque perturbando il quadrato della MN ſarà al quadrato della CA, come il rettangolo delle due DR, *d*R allo ſteſſo quadrato della CA; e pertanto il quadrato dell' ordinata MN ſarà eguale al rettangolo delle due DR, *d*R.

219. Io dico finalmente, che li due triangoli CMN, CPR siano tra li loro eguali. Tirisi perciò la ML parallela alla AE, che s'incontri col diametro AB nel punto L; ed essendo CM a CE, non solo come CA a CN, ma ancora come CL a CA, saranno le tre CL, CA, CN continuamente proporzionali; ed in conseguenza, siccome il quadrato della CA dee essere eguale al rettangolo delle due CL, CN; così, se l'uno, e l'altro tolgasi dal quadrato della CN, sarà il rettangolo delle due CN, NL ancora eguale al rettangolo dell' altre due AN, BN; e per tanto il quadrato dell' ordinata MN sarà al rettangolo delle due CN, NL similmente, come il quadrato della CD al quadrato della CA.

220. Essendosi poi dimostrato, che CD sia a CR, come CA a CN; sarà permutando CD a CA, come CR a CN. Onde, essendo li quadrati delle due CD, CA nella stessa ragione colli quadrati dell' altre due CR, CN; sarà altresì il quadrato dell' ordinata MN al rettangolo delle due CN, NL, come il quadrato della CR, al quadrato della CN; ed in conseguenza permutando il quadrato della MN sarà al quadrato della CR, come

me il rettangolo delle due CN, NL al quadrato della CN, o pure come NL a CN. Ma li due triangoli MLN, CPR, come ſimili tra di loro, ſono come li quadrati delle due MN, CR; e gl' altri due MLN, CMN, per avere la ſteſſa altezza, ſono come NL a CN. Dunque ſarà altresì il triangolo MLN al triangolo CPR, come lo ſteſſo triangolo MLN al triangolo CMN; e per tanto li due triangoli CPR, CMN ſaranno tra di loro eguali.

221. Ciò poſto, non ſarà difficile ora il dimoſtrare, che colli vertici degl' altri diametri conjugati ſi abbiano due altre iperboli oppoſte. In fatti eſſendo eguali li due triangoli CPR, CMN, ed eſſendo l' angolo CRP eguale all'angolo CNM; ſaranno proporzionali, così le quattro rette PR, MN, CN, CR, come li loro quadrati. Onde eſſendoſi dimoſtrato, che il quadrato della MN ſia eguale al rettangolo delle due DR, *d*R; ſarà il quadrato della PR al rettangolo delle due DR, *d*R, come il quadrato della CN al quadrato della CR. Ma ſi è dimoſtrato altresì, che CA ſia a CN, come CD a CR. Dunque, eſſendo il quadrato della CN al quadrato della CR, come il quadrato della CA al quadrato della CD;

 ſarà

ſarà il quadrato della PR al rettangolo delle due DR, *d*R ſimilmente, come il quadrato della CA al quadrato della CD.

222. Se adunque deſcrivanſi due altre iperboli oppoſte, dì cui al contrario D*d* ſia il diametro principale, ed AB il ſuo conjugato; chiaro ſi è, che in eſſe debbano eſſere ſituati li vertici P, e *p* dell' altro conjugato P*p*; e per la ſteſſa ragione ancora li vertici degl'altri conjugati dovranno avere la loro ſituazione nelle ſteſſe iperboli. Ma, ſiccome li diametri di queſt' altre iperboli ſono conjugati delli diametri delle due prime; così al contrario li diametri delle due prime iperboli ſaranno conjugati delli diametri di queſt' altre due; onde dovranno dirſi iperboli conjugate, così le ſeconde per rapporto alle prime, come le prime per rapporto alle ſeconde.

223. Eſſendo così, conforme il quadrato dell' ordinata MN ſi è dimoſtrato eguale al rettangolo delle due DR, *d*R; così al contrario il quadrato dell' ordinata PR ſarà eguale al rettangolo delle due AN, BN. Ed in fatti eſſendo proporzionali le quattro CA, CN, CD, CR, ſaranno proporzionali ancora li loro quadrati; onde dividendo il quadrato della CA ſarà al rettangolo delle due AN, BN, come il

il quadrato della CD al rettangolo delle due DR, *d*R. Ma questo quadrato a questo rettangolo sta, come il quadrato della CA al quadrato della PR. Dunque il quadrato della CA sarà al rettangolo delle due AN, BN, come lo stesso quadrato della CA al quadrato della PR; e per tanto il rettangolo delle due AN, BN, ed il quadrato della PR saranno eguali tra di loro.

224. Or da ciò ne segue, che nell' iperbole sia sempre la stessa, non già la somma, come nell' ellisse, ma la la differenza delli quadrati fatti da due diametri conjugati. Pongasi perciò, che AB, D*d* siano li due assi dell' iperbole. Essendo adunque il quadrato della CA eguale alla differenza tra il quadrato della CN, ed il rettangolo delle due AN, BN; sarà lo stesso quadrato della CA eguale alla differenza tra li quadrati delle due CN, PR. E similmente, essendo il quadrato della CD eguale alla differenza tra il quadrato della CR, ed il rettangolo delle due DR, *d*R; sarà lo stesso quadrato della CD eguale alla differenza tra li quadrati delle due CR, MN.

225. Quindi la differenza tra li quadrati delle due CA, CD sarà eguale alla differenza tra la somma delli quadrati delle due CN, MN, e la som-

ma delli quadrati dell' altre due C R , P R. Ma colla prima somma si ha il quadrato della C M, e coll' altra somma si ha il quadrato della C P. Dunque la differenza tra li quadrati delle due C A, C D sarà eguale alla differenza tra li quadrati delle due C M, CP; e per tanto la differenza delli quadrati fatti dalli due diametri conjugati M *m*, P *p*, come eguale alla differenza delli quadrati fatti dalli due assi A B, D *d*, dovrà essere sempre la stessa.

226. Da questa proprietà rilevante delli diametri conjugati dell' iperbole, possiamo dedurne un' altra non meno rilevante di tutti li diametri; e si è, che non già le somme, come nell' ellisse, ma le differenze tra li diametri, e li loro parametri siano nella reciproca ragione degli stessi diametri. In fatti, essendo la figura di qualsisia diametro eguale al quadrato del suo conjugato, sarà la differenza tra il quadrato di un diametro, e l' altro del suo conjugato eguale al rettangolo, che si fa dalla differenza tra il diametro, ed il suo parametro nello stesso diametro. Onde, dovendo essere questo rettangolo ancora lo stesso in tutti li diametri, chiaro si è, che le differenze tra li diametri, e li loro parametri siano nella reciproca ragione degli stessi diametri.

227. Secondo questa proprietà adunque, quanto più aumentasi il diametro dell'iperbole, tanto meno dee egli differire dal suo parametro; il che non potrebbe avvenire, se ancora il parametro non ricevesse maggior aumento. Quindi, se il diametro sia di una lunghezza infinita, dovrà essere al contrario infinitamente picciola la differenza tra esso, ed il suo parametro; e perciò il diametro, ed il parametro saranno tra di loro eguali. Essendo adunque di questa indole li due ultimi diametri dell'iperbole, che sono egualmente distanti dall'asse; li medesimi saranno eguali così tra di essi, come colli loro parametri; e questi stessi saranno li due diametri eguali, che separano gl' altri diametri dalli loro conjugati.

228. Per mezzo della stessa proprietà, se sia dato il parametro di un diametro, si potrà facilmente determinare il parametro di qualsisia altro diametro, ed ecco come. Prendasi primieramente la differenza tra il parametro dato, ed il suo diametro; indi facciasi, come il diametro, di cui si cerca il parametro, al diametro, di cui il parametro è dato, così quella differenza ad una quarta proporzionale; e siccome con questa quarta proporzionale si ha la differenza tra il primo diametro, ed il suo parame-

metro, così per mezzo di essa si verrà nella conoscenza del parametro, che si dimanda.

§. XVII.

Delle tangenti dell' iperbole.

229. LE proprietà, così delle tangenti, come delle secanti dell' iperbole sono simili a quelle dell' ellisse, e le dimostrazioni ancora sono quasi le stesse. Ed in fatti, per quanto alle proprietà delle tangenti, la prima si è, che siccome la retta, tirata dal vertice di un diametro parallela alle sue ordinate, dee essere tangente dell' iperbole; così al contrario, essendo una retta tangente dell' iperbole, dovrà ella essere parallela all' ordinate del diametro, che ha per suo vertice il punto del contatto: dal che ne segue, che conforme ad un' istesso punto dell' iperbole non può tirarsi, se non che una sola tangente; così l' angolo mistilineo, che forma la tangente colla stessa iperbole, sia minore di ogn' angolo acuto rettilineo.

Fig. 44. 230. La seconda proprietà si è, che se la tangente MT, tirata ad un punto dell' iperbole M, s'incontri con uno de' suoi diametri AB nel punto T; ed ed essendo C il centro dell' iperbole, si abbassi dal punto del contatto M sullo stesso diametro l' ordinata MN; siano le tre CN, CA, CT continuamente proporzionali, dimodochè il quadrato della CA sarà eguale al rettangolo delle due CN, CT. Ed è da notarsi, che questa proprietà ha luogo ancora per rapporto al conjugato D*d* del diametro AB, non ostante di essere alquanto diversa la sua indole; poichè, incontrandosi con esso la tangente MT nel punto K, ed abbassandosi sul medesimo l' ordinata MO, pure saranno continuamente proporzionali le tre CO, CD, CK, ed il quadrato della CD sarà eguale al rettangolo delle due CO, CK.

231. In fatti nel conjugato D*d* il quadrato dell' ordinata MO dee essere ai quadrati delle due CO, CD, come il quadrato della CA al quadrato della CD; onde permutando il quadrato della MO sarà al quadrato della CA, come sono li quadrati delle due CO, CD al solo quadrato della CD. Ma il quadrato della CA è eguale al rettangolo delle due CN, CT; ed il quadrato della MO sta a questo rettangolo, come MO a CT, o pure come OK a CK. Dunque OK sarà a CK, come sono li quadrati delle due

due CO, CD al solo quadrato della CD; e per tanto, dovendo essere dividendo CO a CK, come il quadrato della CO al quadrato della CD, saranno le tre CO, CD, CK continuamente proporzionali.

232. Da questa seconda proprietà si dedurranno le stesse conseguenze, ricavate nell' ellisse dalla sua consimile; cioè primieramente, che il rettangolo delle due AT, BT sia eguale al rettangolo dell'altre due NT, CT; indi, che incontrandosi la tangente MT colle due AI, BL parallele alla MN ne' punti I, ed L, sia il rettangolo delle due AI, BL eziandio eguale al rettangolo dell'altre due MN, CK; in appresso, che lo stesso rettangolo delle due AI, BL, che sono tangenti delle due iperboli opposte ne' punti A, e B vertici del diametro AB, sia eguale altresì al quadrato della metà del suo conjugato D*d*, ed in conseguenza eguale alla quarta parte della sua figura; e finalmente, che essendo AH il parametro del diametro AB, sia il quadrato dell' ordinata MN al rettangolo delle due CN, NT come AH ad AB.

233. Se poi AB sia l'asse delle due iperboli opposte, si potranno dalla stessa proprietà dedurre l' altre tre conseguenze, che nella stessa supposizione si sono

sono ricavate nell' ellisse; cioè primieramente, che incontrandosi la perpendicolare MS, alzata sulla tangente MT, coll' asse AB nel punto S, sia SN a CN, come il parametro AH all' asse AB; indi, che il quadrato della perpendicolare MS sia al rettangolo delle due porzioni della tangente IM, LM eziandio, come il parametro AH all' asse AB; ed in fine, che se D*d* sia il conjugato dell' asse AB, P*p* il conjugato del diametro M*m*, e CQ un' altra perpendicolare, abbassata dal centro C sulla tangente MT, sia CP a CD, come CA a CQ.

234. Per mezzo di questa terza conseguenza vedesi chiaramente, che se intorno ai due diametri conjugati M*m*, P*p* formisi un parallelogrammo con rette, tirate per gli loro vertici in modo, che siano reciprocamente ad essi parallele; la sua capacità sia sempre la stessa, per essere eguale al parallelogrammo consimile, formato intorno ai due assi AB, D*d*. Se poi colle rette, che congiungono li vertici degli stessi diametri, formisi un' altro parallelogrammo; chiaro si è, che quest' altro parallelogrammo sia eguale alla metà del primo; onde ancora la sua capacità dovrà essere sempre la stessa, come in fatti è eguale a quella del paral-

rallelogrammo consimile, formato colle rette, che congiungono li vertici delli due assi.

235. La terza proprietà si è, che se A I, M I siano due tangenti dell'iperbole, che s' incontrino tra di esse nel punto I; li loro quadrati siano, come le figure delli due diametri A B, M*m*, che hanno per vertici li due punti del contatto A, ed M; la qual proprietà ha luogo eziandio, se delle due tangenti una sia tirata in un' iperbole, e l' altra nella sua opposta: come in fatti, se la B L tocchi l' iperbole opposta nel punto B, che è l'altro vertice del diametro A B, e la medesima s'incontri colla M I prolungata nel punto L; pure il quadrato della B L sarà al quadrato della M L, come la figura del diametro A B alla figura del diametro M*m*.

236. Dipende ciò dall' essere le due B L, M L nella stessa ragione coll' altre due A I, M I. Per dimostrarlo, s' incontri la tangente M L col diametro A B nel punto T, e si abbassi sullo stesso diametro l' ordinata MN. Essendo adunque CT a CA, come CA a C N; conforme componendo dee essere B T a C A, come B N a C N; così dividendo sarà A T a C A, come A N a C N; e per tanto ordinando

BT

BT sarà ad AT, come BN ad AN. Ma BT sta ad AT, come BL ad AI; e BN sta ad AN, come ML ad MI. Dunque sarà ancora BL ad AI, come ML ad MI; ed in conseguenza permutando le due BL, ML saranno nella stessa ragione coll' altre due AI, MI.

237. La quarta, ed ultima proprietà si è, che se al vertice M di un diametro M*m* tirisi la tangente MT, che s' incontri nel punto T con un altro diametro AB, di cui conjugato ne sia D*d*; debba essere il quadrato della tangente MT al rettangolo delle due AT, BT, ovvero alla differenza tra li quadrati delle due CA, CT, come la figura del diametro M*m* alla figura del conjugato D*d* dell'altro diametro; e la stessa proprietà ha luogo altresì, se la tangente MT s' incontri col conjugato D*d* nel punto K, ma con questo divario, che il quadrato della MK sarà, non già alla differenza, ma alla somma delli quadrati delle due CD, CK, come la figura del diametro M*m* alla figura del diametro AB, che è il conjugato di D*d*.

238. In fatti, se P*p* sia il conjugato del diametro M*m*, e su di esso si abbassi l' ordinata DF, saranno proporzionali, così le rette MK, CF, CM,

CM, DF, come li loro quadrati. Ma, per ragion dell' altre due iperboli conjugate, il quadrato della CM sta al quadrato della DF, come il quadrato della CP al rettangolo delle due PF, *p*F. Dunque ancora il quadrato della MK sarà al quadrato della CF, come il quadrato della CP al rettangolo delle due PF, *p*F; ed in conseguenza togliendo li termini della seconda ragione dalli termini della prima, sarà la differenza tra li quadrati delle due MK, CP al quadrato della CP, come il quadrato della MK al quadrato della CF, o pure come il quadrato della CK al quadrato della CD.

239. Quindi, conforme componendo il quadrato della MK dee essere al quadrato della CP*l*, come la somma delli quadrati delle due CD, CK al quadrato della CD; così permutando il quadrato della MK sarà alla somma delli quadrati delle due CD, CK, come il quadrato della CP al quadrato della CD. Ma di questi due quadrati quadrupli ne sono li quadrati delli due diametri P*p*, D*d*, li quali sono eguali alle figure degl' altri due M*m*, AB. Dunque il quadrato della tangente MK sarà alla somma delli quadrati delle due CD, CK, come la figura del

del diametro M *m* alla figura del diametro A B.

240. Del rimanente, così nell' iperbole, come nell' elliſſe, dovendoſi tirare la tangente ad un punto dato nella ſteſſa curva, altro non dovrà farſi, ſe non che tirare dal dato punto una retta parallela all' ordinate del diametro, che ha lo ſteſſo punto per ſuo vertice. Ma, ſe il punto ſia dato fuori della curva, come il punto T, ſi dovrà primieramente determinare il diametro AB, che paſſi per lo punto T; indi tagliare da queſto diametro la porzione CN, che ſia a C A, come C A a C T; e finalmente elevare su di eſſa la N M in modo, che ſia ordinata dello ſteſſo diametro; poichè, congiunta la M T, ſi avrà con queſta retta la tangente, che ſi dimanda.

§. XVIII.

§. XVIII.

Delle secanti dell' iperbole.

241. LE rette, che incontransi coll' iperbole segandola, debbonsi distribuire in tre classi, per la ragione, che possono essere, o li suoi proprj diametri, o l' ordinate degli stessi diametri, o finalmente l' ordinate delli diametri conjugati. Qualunque sia la loro classe, non v'ha dubbio, che ciascuna di esse debba segare l'iperbole in due punti col solo divario, che nelle secanti della prima, e terza classe uno delli due punti ritrovasi in un' iperbole, e l' altro nella sua opposta, quandochè nell'altre della seconda classe ambidue li punti ritrovansi in un' istessa iperbole.

242. Le stesse secanti possono incontrarsi ancora tra di loro; ed essendo le metà di qualsisia diametro ordinate del suo conjugato, la proprietà del loro incontro similmente può racchiudersi in un sol teorema, con dire, che se due ordinate di due diversi diametri s' incontrino così tra di loro, come coll' iperbole dall' altra parte, li rettangoli delle loro porzioni, prese dall' iperbole per sino al punto dell' incontro, siano come le figure degli stessi diametri.

243.

243. Di questo teorema però moltissimi sono li casi, li quali debbonsi distinguere tra esso loro, non solo per ragion dell'ordinate prolungate, di cui o ciascuna, o una sola, o pure nessuna può passare per lo centro dell'iperbole; ma ancora per ragion degli stessi diametri, che possono essere, o ambidue diametri proprj dell'iperbole, o ambidue diametri conjugati, o finalmente uno proprio, ed un'altro conjugato. Intanto, per dimostrare alcuni di questi casi, giova prima far vedere ciò, che avviene ad un diametro conjugato, qualora incontrasi con un'ordinata prolungata di qualsisia altro diametro.

244. Siano perciò AB, OR due diametri proprj dell'iperbole, di cui conjugati ne siano gl'altri due D*d*, P*p*; pongasi primieramente, che il diametro conjugato P*p* s'incontri coll'ordinata prolungata M*m* del diametro proprio AB nel punto E. Io dico, che il rettangolo delle due ME, *m*E sia alla somma delli quadrati dell'altre due CE, CP, come sta la figura del diametro AB alla figura del diametro OR. Per dimostrarlo, si abbassi sul conjugato D*d* l'ordinata MS, a cui facciansi parallele l'altre due EF, PQ. *Fig.* 45.

245. Essendo adunque equiangoli li due triangoli CPQ, CEF, saranno pro-

proporzionali, così le rette PQ, EF, CP, CE, come li loro quadrati. Ma, per essere la PQ ordinata dello stesso diametro Dd nell' altra iperbole conjugata, il quadrato della PQ sta al quadrato della EF, o sia MS, come la differenza tra li quadrati delle due CQ, CD alla somma delli quadrati dell'altre due CS, CD. Dunque nella ragione di questa differenza a questa somma saranno ancora li quadrati delle due CP, CE; ed in conseguenza componendo la differenza tra li quadrati delle due CQ, CD sarà alla somma delli quadrati dell' altre due CQ, CS, come il quadrato della CP alla somma delli quadrati delle due CE, CP.

246. Essendo poi per gli stessi triangoli proporzionali altresì li quadrati delle rette CP, CE, CQ, CF; sarà similmente componendo il quadrato della CP alla somma delli quadrati delle due CE, CP, come il quadrato della CQ alla somma delli quadrati delle due CF, CQ. Onde ancora la differenza tra li quadrati delle due CQ, CD sarà alla somma delli quadrati dell' altre due CQ, CS, come il quadrato della CQ alla somma delli quadrati delle due CF, CQ; e per tanto, togliendo li termini della prima ragione dalli termini della seconda, il quadra-

drato della CD sarà alla differenza tra li quadrati delle due CF, CS, come il quadrato della CQ alla somma delli quadrati delle due CF, CQ, o pure come il quadrato della CP alla somma delli quadrati delle due CE, CP.

247. Quindi permutando sarà il quadrato della CD al quadrato della CP, come la differenza tra li quadrati delle due CF, CS alla somma delli quadrati delle due CE, CP. Ma, per essere la CF eguale alla NE, e la CS eguale alla NM, la differenza tra li quadrati delle due CF, CS è eguale al rettangolo delle due ME, *m*E. Dunque sarà ancora il quadrato della CD al quadrato della CP, come il rettangolo delle due ME, *m*E alla somma delli quadrati dell'altre due CE, CP; ed in conseguenza, essendo le figure delli due diametri AB, OR nella stessa ragione colli quadrati delle due CD, CP, sarà la figura del diametro AB alla figura del diametro OR, come il rettangolo delle due ME, *m*E alla somma delli quadrati dell'altre due CE, CP.

248. Pongasi in appresso, che la *Fig.*
M*m*, con cui incontrasi il conjugato *46.*
P*p* nel punto E, sia ordinata prolungata dell' altro conjugato D*d*; e se abbassata sul diametro AB l' ordinata

MS, faccianſi ad eſſa parallele l' altre due EF, PQ, con dimoſtrazione ſimile alla precedente ſi farà eziandio vedere, che il rettangolo delle due ME, *m* E ſia alla ſomma delli quadrati dell' altre due CE, CP, come il quadrato della CA al quadrato della CP, ed in conſeguenza come la figura del diametro D*d* alla figura del diametro OR.

Fig. 47. 249. Ciò poſto, ſiano ora M*m*, P*p* le due ordinate, che prolungate dall' altra parte per ſino all' iperbole, incontranſi tra di loro nel punto E; e ſiano ancora AB, OR li due diametri, a cui rapportanſi le ſteſſe ordinate. Secondo il teorema adunque, enunciato di ſopra, dovrà eſſere il rettangolo delle due ME, *m* E al rettangolo dell' altre due PE, *p* E, come la figura del diametro AB alla figura del diametro OR. Or ciò è chiaro, qualora ciaſcuna delle due M*m*, P*p* paſſa per lo centro dell' iperbole, per la ragione, che facendoſi eguali le porzioni di ciaſcuna di eſſe, li rettangoli delle loro porzioni ſono, come li loro quadrati, ed in conſeguenza come le figure delli due diametri AB, OR.

250. Se poi la ſola P*p* paſſi per lo centro, ed eſſendo AB diametro proprio delle due iperboli oppoſte, l' altra M*m* ſia ſituata in una di eſſe; ſi dimo-

moſtrerà, come nell'elliſſe, che il rettangolo delle due ME, mE ſia al rettangolo dell' altre due PE, pE, come la figura del diametro AB alla figura del diametro OR. Anzi per poco, che vogliaſi riflettere, ſi vedrà, che la ſteſſa dimoſtrazione abbia luogo ancora, ſe paſſando la Pp per lo centro, ed eſſendo AB diametro conjugato, l'altra Mm ſia ſituata tra le due iperboli oppoſte.

251. Finalmente, ſe neſſuna delle due Mm, Pp paſſi per lo çentro, chiaro ſi è, che la loro ſituazione poſſa variare in quattro maniere diverſe; ma qualunque ella ſia, ſi dimoſtrerà, che il rettangolo delle due ME, mE ſia al rettangolo dell' altre due PE, pE, come ſono le figure delli due diametri AB, OR, con far paſſare per lo punto E, in cui interſeganſi le due Mm, Pp, un'altro diametro Ss, ſiccome fu fatto nell'elliſſe. E poichè queſt' altro diametro Ss, può eſſere tal volta conjugato, perciò ſi è ſtimato preventivamente far vedere ciò, che avviene ad un diametro conjugato, qualora incontraſi con un'ordinata prolungata di qualſiſia altro diametro.

252. Se li due diametri AB, OR ſiano conjugati tra eſſo loro, ſarà la Pp parallela al primo di eſſi AB, ed *Fig.* 48.

G 2 al

al contrario la Mm parallela all' altro OR; ma, quando ciò avviene, potrà dimoſtrarſi il teorema, ſenza eſſervi biſogno, di tirare per lo punto E altro diametro. Si abbaſſi perciò ſul diametro AB l'ordinata PQ; e ſe AH ſia il parametro dello ſteſſo diametro, ſarà AH ad AB, come la figura del diametro AB alla figura del diametro OR. Ma nella ragione di AH ad AB ſta, così il quadrato della MN al rettangolo delle due AN, BN, come il quadrato della PQ al rettangolo delle due AQ, BQ. Dunque, dovendo ancora eſſere nella ſteſſa ragione la differenza delli due quadrati alla differenza delli due rettangoli; ſarà il rettangolo delle due ME, mE al rettangolo dell' altre due PE, pE, come la figura del diametro AB alla figura del diametro OR.

253. A ſimiglianza di quel tanto fu avvertito nell'elliſſe, da queſto teorema delle ſecanti poſſono dedurſi li due, dimoſtrati di ſopra intorno alle tangenti; cioè I, che incontrandoſi una tangente con un diametro proprio dell' iperbole, ſia il quadrato della tangente al rettangolo delle due porzioni del diametro, preſe dalli ſuoi vertici per ſino al punto dell' incontro, come la figura del diametro, che ha per vertice

tice il punto del contatto, alla figura del diametro, con cui incontrasi la tangente; e II, che incontrandosi insieme due tangenti, li loro quadrati siano, come le figure delli due diametri, che hanno per loro vertici li due punti del contatto. Anzi dallo stesso teorema può dedursi altresì ciò, che dee avvenire ad una tangente, qualora incontrasi con un' ordinata di un qualche diametro, prolungata dall' altra parte per fino all' iperbole.

254. Dal medesimo teorema ricavasi inoltre, che un cerchio possa segare l' iperbole, non solo in due, ma ancora in quattro punti; li quali però saranno situati in modo, che o tutti quattro si ritroveranno in una istessa iperbole, o pure due di essi in una, e gl'altri due nella sua opposta. Conforme poi con due punti d' intersegamento uniti insieme si ha il punto del contatto; così il cerchio potrà incontrarsi altresì coll' iperbole, o con segarla in due punti, e toccarla in uno; o pure con toccarla in due punti diversi, senza segarla. Ed in fine, siccome incontrandosi il cerchio coll'iperbole in due punti, possono essere questi due punti, talora d' intersegamento, e talora di contatto; così, se mai l' incontro facciasi

in un sol punto, questo dovrà essere sempre punto di contatto.

§. XIX.

Delli due fochi dell' iperbole.

255. LA considerazione delli due fochi ha luogo ancora nell' iperbole, per cui similmente s' intendono li due punti del suo proprio asse, ai quali se tirinsi l' ordinate, ciascuna di esse si fa eguale alla metà del parametro dello stesso asse. Così, se AB sia l' asse proprio dell' iperbole, e ciascuna delle due ordinate EF, *ef* sia eguale alla metà del suo parametro AH, li due punti F, ed *f* diconsi essere fochi dell'iperbole, per una proprietà loro speciale, che da quì a poco sarà da noi additata. Onde, essendo eguali tra di loro le due ordinate EF, *ef*, ancora nell' iperbole li due fochi F, ed *f* saranno egualmente distanti, così dal centro C, come dalli due vertici dell' asse A, e B.

Fig. 49.

256. Conforme poi dall' uguaglianza delle due ordinate EF, *ef* ancora nell' iperbole ne segue, che li due fochi F, ed *f* siano talmente situati nell' asse AB, che tanto il rettangolo delle due AF, BF, quanto il rettangolo dell'

dell'altre due Af, Bf sia eguale alla quarta parte della figura dello stesso asse; così, se Dd sia l'asse conjugato dell' iperbole, e congiungansi le due DA, DB, ciascuna di esse sarà eguale alla CF, o sia Cf, cioè alla metà della distanza delli due fochi Ff: dimodochè, se col centro C, e coll' intervallo di una delle due DA, DB descrivasi un'arco circolare coll' intersegamento di quest' arco collo stesso asse si avranno li due fochi dell' iperbole.

257. Se la MT sia tangente dell' iperbole in un qualche punto M, e la medesima s' incontri colle due AI, BL, alzate perpendicolarmente sull'asse AB, ne'punti I, ed L, secondo è stato altrove dimostrato, ancora il rettangolo delle due AI, BL dee essere eguale alla quarta parte della figura dell' asse AB; onde, facendosi il rettangolo delle due AI, BL eguale, così al rettangolo delle due AF, BF, come al rettangolo dell'altre due Af, Bf; sarà tanto AI ad AF, come BF a BL, quanto AI ad Af, come Bf a BL; e per tanto, dovendo essere equiangoli, così li due triangoli IAF, FBL, come gl' altri due IAf, fBL, sarà retto, tanto l'angolo IFL, quanto l' angolo IfL: dimodochè ancora nell' iperbole potranno determinarsi li

due fochi F, ed f, con descrivere un cerchio sulla IL, come diametro.

258. Ma da ciò, che il cerchio descritto sulla IL, come diametro, debba passare per gli due fochi F, ed f, ne segue, come nell'ellisse, che se dal punto P, in cui incontransi le due If, LF, si abbassi una perpendicolare sulla tangente ML, questa debba dividerla nella ragion delle due AI, BL, ed in conseguenza cadere su 'l punto del contatto M. Dal che poi primieramente si dedurrà, che descrivendosi due cerchi, li quali abbiano le due PI, PL per loro diametri, debba passare il primo di essi per gli due punti F, ed M, ed il secondo per gli due f, ed M; ed indi per mezzo degl' angoli eguali, che ci somministrano questi due cerchi, si dimostrerà, che le rette MF, Mf, tirate dal punto del contatto M alli due fochi F, ed f, formino, come nell' ellisse, angoli eguali colla tangente IL.

259. Quindi nell' iperbole l' angolo FMf, contenuto dalle due MF, Mf, sarà diviso per metà dalla stessa tangente MT, la quale similmente dividerà la distanza delli due fochi Ff talmente nel punto T, che TF sarà a Tf, come MF ad Mf. Dall' essere poi eguali gl' angoli, che formano le due

MF,

M F, M f colla tangente M L è derivato altresì, che ancora nell' iperbole sìansi chiamati fochi li due punti F, ed f, in quanto che, se colla rivoluzione dell' iperbole A M intorno all' asse A B formisi un specchio convesso, li raggi di luce, che cadono sulla sua superficie da un corpo lucido, situato nel punto f, attenta la riferita uguaglianza, dovranno rifletterſi in modo, che dopo la riflessione sembreranno partire dall' altro punto F.

260. Alle stesse rette M F, M f, *Fig.* che tirate dal punto del contatto M 50. alli due fochi F, ed f, formano angoli eguali colla tangente ML, ancora nell' iperbole compete un' altra proprietà; e si è, che non già la somma di esse, come nell' ellisse, ma la loro differenza sia eguale all' asse AB. Intanto, per dimostrarla, bisogna eziandio premettere, che se per lo centro dell' iperbole C tirisi la C O parallela ad una delle due M F, che s' incontri colla tangente M L nel punto O, sia la C O eguale alla metà dello stesso asse; ed in fatti, tirata la fR parallela alla stessa MF, saranno eguali li due angoli fMR, fR M; e pertanto, facendosi isoscele il triangolo MfR, ed essendo eguali le due MO, RO, sarà la fO perpendicolare sulla tangente M L.

261. Quindi, dovendo passare per gli due punti B, ed O il mezzo cerchio descritto sulla Lf come diametro, e facendosi in conseguenza eguali a due retti li due angoli BfL, BOL, sarà l'angolo BfL eguale all'angolo BOI. Ma, per l'altro mezzo cerchio descritto sulla If come diametro, che dee passare per gli due punti A, ed O, ancora l'angolo AfI è eguale all'angolo AOI. Dunque facendosi eguali li due angoli IfL, AOB, ed essendo retto il primo di essi IfL, sarà retto ancora l'altro AOB; e per tanto, siccome il mezzo cerchio descritto sull'asse AB, come diametro, dee passare per lo punto O, così la CO sarà eguale alla sua metà CA, ovvero CB.

262. Essendo adunque la CO eguale alla metà dell'asse AB, egli è facile ora il dimostrare, che la differenza delle due MF, Mf sia eguale all'intero asse AB. S'incontri perciò la CO colla Mf nel punto Q, ed essendo equiangoli, così li due triangoli MFf, QCf, come gl'altri due MRf, MOQ; chiaro si è, che sia dupla, tanto la MF della CQ, quanto la fR, o sia Mf della OQ; onde, dovendo essere la differenza delle due MF, Mf similmente dupla della differenza dell'altre due

due C Q, O Q, sarà quella prima differenza eguale all' asse A B. Conforme poi questa proprietà dee aver luogo, ovunque prendasi nell' iperbole il punto M; così per rapporto ai due vertici A, e B ricavasi ella da ciò, che essendo la A F eguale alla B *f*, la differenza così delle due A F, A *f*, come delle due B F, B *f* dee essere eguale all' asse A B.

263. Attenta una tal proprietà, se sia dato l' asse dell' iperbole A B insieme colli due fochi F, ed *f*, potrà ella descriversi in un' altra maniera, molto più facile ad eseguirsi, ed ecco come. Adattisi ad uno delli due fochi, come al foco *f* la riga mobile *f* L, che non solo sia più lunga dell' asse A B, ma abbia altresì lunghezza corrispondente all' estensione, che si vuol dare all'iperbole. Indi prendasi il filo F M L di lunghezza tale, che attaccato con uno delli suoi estremi all' altro foco F, e coll' altro al termine della riga L, resti eguale alla differenza tra la riga *f*L, e l' asse A B. Aggirisi di poi la riga *f* L intorno al foco *f*, ed insieme con essa conducasi ancora per mezzo di un stile il filo F M L in modo, che combaciandosi una sua porzione M L colla stessa riga, resti tesa la rimanente MF. E siccome dallo stesso stile si segnerà *Fig.* 51.

nel piano una curva, in cui la differenza delle rette MF, Mf, tirate da qualsisia suo punto M alli due fochi F, ed f, si fa eguale all' asse AB; così questa stessa curva sarà l'iperbole, che si dimanda.

Fig. 52. 264. Alle medesime rette MF, Mf, tirate dal punto del contatto M ai due fochi F, ed f, ancora nell'iperbole compete una terza proprietà; e si è, che il loro rettangolo sia eguale alla quarta parte della figura del diametro, che ha per uno de' suoi vertici il punto M. La dimostrazione di una tal proprietà è simile a quella, fatta di essa nell' ellisse. Si abbassi perciò dal foco F sulla tangente ML la perpendicolare FO, che s' incontri coll' altra Mf nel punto R; ed essendo eguali li due angoli FML, fML, saranno eguali ancora, così le due MF, MR, come le due FO, RO. Onde, dovendo passare il cerchio descritto sulla IL, come diametro, per gli due punti f, ed R, il rettangolo delle due MR, Mf, o pure delle due MF, Mf, come eguale al rettangolo dell' altre due MI, ML, sarà eguale alla quarta parte della figura del diametro Mm.

265. Vedesi intanto, che conforme la tangente ML divide per metà l'angolo FMf, contenuto dalle due MF, Mf;

M*f*; così, se dalla M*f* taglisi la MR eguale alla MF, la stessa tangente debba dividere ancora per metà, e ad angoli retti la FR. Se poi per lo foco F tirisi la FG parallela alla tangente ML, che s'incontri colla M*f* nel punto G; chiaro si è, che siano eguali le due MF, MG. Onde la perpendicolare MS, alzata dal punto del contatto M sulla tangente ML, conforme divide l'angolo FMG in parti eguali, così dovrà dividere per metà, e ad angoli retti la FG. Anzi, siccome, con tirarsi la FG parallela alla tangente ML, ancora il rettangolo delle due MG, M*f* si fa eguale alla quarta parte della figura del diametro M*m*; così, se la stessa FG incontrisi con questo diametro nel punto K, si dimostrerà, come nell'ellisse, che MK sia ad *m*K, come MF ad M*f*.

266. Finalmente ancora nell'iperbole considerasi la direttrice, la quale determinasi primieramente, con tagliare dall'asse AB la porzione CG, che sia terza proporzionale dopo le due CF, CA; ed indi, con alzare sullo stesso asse dal punto G la perpendicolare GK. Conforme poi da ciò ricavasi, che nella ragione di CF a CA, o pure della distanza delli due fochi F*f* all'asse AB sia, tanto AF ad AG, quanto *Fig.* 53.

BF

BF a BG; così, dopo essersi dimostrato, che essendo MS perpendicolare sulla tangente MT, sia MF ad SF, come CA a CF, si dimostrerà in appresso, che abbassandosi sulla direttrice GK la perpendicolare MK, sia MF ad MK similmente, come CF a CA.

§. XX.

Degl' asintoti dell' iperbole.

267. INtorno all' iperbole restano a dimostrarsi le proprietà, che ad essa competono per rapporto ai suoi asintoti. Chiamansi con questo nome le due diagonali del parallelogrammo rettangolo, che formasi colle rette, tirate per gli vertici delli due assi in modo, che siano reciprocamente paral-
Fig. lele agli stessi assi. Così, se AB, D*d*
54. siano li due assi dell' iperbole, e tirinsi così per gli vertici del primo le rette FG, HI parallele all' altro D*d*, come per gli vertici di quest' altro le rette FH, GI parallele al primo AB; le due diagonali FI, GH del parallelogrammo rettangolo, formato con queste rette, si diranno essere asintoti dell' iperbole.

268. Si è dato tal nome a queste due diagonali FI, GH per la ragione, che

che secondo sarà dimostrato da quì a poco, le medesime, per quanto si prolunghino, si accostano sempre più all' iperbole, ma non mai con essa s' incontrano. Vedesi intanto, che siccome li due asintoti F I, G H intersegansi tra di loro nel centro dell' iperbole C; così l' angolo, che formano nello stesso centro, sia retto, acuto, o ottuso, secondochè il proprio asse dell' iperbole A B è eguale, maggiore, o minore del suo conjugato D *d*; onde, per ragion di quest' angolo, l' iperbole può essere di tre specie, cioè rettangola, acutangola, ed ottusangola.

269. Essendo la F G divisa per metà nel punto A; chiaro si è, che se un' ordinata M N dell' asse A B, distendasi per fino a che s' incontri coll' iperbole dell' altra parte nel punto *m*, e colli due asintoti ne' punti O, ed *o*, ancora la O *o* debba essere divisa per metà nel punto N, ed in conseguenza farsi eguale così la M O alla *m o*, come la *m* O alla M *o*. Quindi la prima, e principal proprietà, che compete all' iperbole per rapporto ai suoi asintoti, si è, che tanto il rettangolo delle due M O, M *o*, quanto il rettangolo dell'altre due *m* O, *m o* sia eguale al quadrato della metà dell'asse conjugato D *d*, ed in conseguenza eguale alla

alla quarta parte della figura del proprio asse A B.

270. In fatti, per l' iperbole, il quadrato della M N sta al rettangolo delle due A N, B N, come il quadrato della C D, o sia A F al quadrato della C A. Ma, per gli triangoli equiangoli C N O, C A F, ancora il quadrato della NO sta al quadrato della C N, come il quadrato della A F al quadrato della C A. Dunque nella ragione di questi stessi quadrati sarà altresì la differenza tra li quadrati delle due N O, N M alla differenza tra il quadrato della C N, ed il rettangolo delle due A N, B N; e per tanto, essendo la prima differenza eguale al rettangolo delle due M O, M *o*, e la seconda eguale al quadrato della C A, sarà il rettangolo delle due M O, M *o* eguale al quadrato della AF, o sia CD.

271. Per la stessa ragione, se P Q sia un' altra ordinata dell' asse AB, che s' incontri prolungata colli due asintoti ne' punti R, ed *r*; ancora il rettangolo delle due PR, P *r* sarà eguale al quadrato della C D. Ma, siccome da ciò ne segue, che siano eguali tra di loro li due rettangoli, uno della M O nella M *o*, e l' altro della PR nella P *r*; così da questa loro uguaglianza può dedursene un' altra, e si è, che co-

comunque per gli due punti M, e P dell' iperbole tirinsi due rette parallele S*s*, T*t*, che s' incontrino colli due asintoti ne' punti S, *s*, T, *t*, ancora il rettangolo delle due MS, M*s* debba essere eguale al rettangolo dell'altre due PT, P*t*.

272. La ragione è chiara. Imperocchè, essendo equiangoli, così li due triangoli MOS, PRT, come gl' altri due M*os*, P*rt*, li due rettangoli, uno della MS nella M*s*, l' altro della MO nella M*o*, saranno in ragion composta, non solo di MS ad MO, e di M*s* ad M*o*, ma ancora di PR a PT, e di P*r* a P*t*. Ma in questa stessa ragion composta, sta altresì il rettangolo della PT nella P*t* al rettangolo della PR nella P*r*. Dunque li primi due rettangoli saranno nella stessa ragione con quest' altri due; e per tanto, essendo il rettangolo delle due MO, M*o* eguale al rettangolo dell'altre due PR, P*r*, ancora il rettangolo delle due MS, M*s* sarà eguale al rettangolo dell'altre due PT, P*t*.

273. Da quest' altra uguaglianza ne seguono ora varie conseguenze; ed in primo luogo, se tra li due asintoti tirisi ad arbitrio la T*t*, che s' incontri con essi ne' punti T, e *t*, e coll' iperbole ne' punti P, e *p*, ed M*m* sia il dia- *Fig.* 55.

diametro, che divide la P*p* per metà nel punto Q, ancora la tutta T*t* sarà divisa per metà nello stesso punto. In fatti, dovendo essere il rettangolo delle due PT, P*t* eguale al rettangolo dell' altre due *p*T, *pt*; se ad essi aggiungansi li quadrati similmente eguali delle due PQ, *p*Q, sarà il quadrato della TQ ancora eguale al quadrato della *t*Q; e per tanto, facendosi eguali le due TQ, *t*Q, sarà divisa la tutta T*t* per metà nel punto Q.

274. In secondo luogo, se KL sia il conjugato del diametro M*m*, sarà così il rettangolo delle due PT, P*t*, come il rettangolo dell' altre due *p*T, *pt* eguale al quadrato della metà CK di questo conjugato, ed in conseguenza eguale alla quarta parte della figura del diametro M*m*. In fatti, se al vertice del diametro M*m* tirisi la tangente OR, che s' incontri colli due asintoti ne' punti O, ed R; ancora questa tangente, come parallela all' ordinata PQ del diametro M*m*, dovrà essere divisa per metà nel punto M. Onde, essendo eguali le due MO, MR, il loro rettangolo non sarà differente dal quadrato di una di esse MO; e per tanto il rettangolo delle due PT, P*t* sarà eguale al quadrato della MO.

275. Or, attenta questa uguaglianza

za il rettangolo delle due P T, P *t* sarà al quadrato della C M, come il quadrato della M O allo stesso quadrato della C M, o pure come il quadrato della T Q al quadrato della C Q. Onde, togliendo li termini della prima ragione dalli termini della seconda, ancora il quadrato della P Q sarà al rettangolo delle due M Q, *m* Q, come il quadrato della M O al quadrato della C M. Ma, per l'iperbole, il quadrato della PQ dee essere al rettangolo delle due M Q, *m* Q, come il quadrato della C K al quadrato della C M. Dunque, facendosi eguali li quadrati delle due M O, C K, sarà il rettangolo delle due P T, P *t* eguale al quadrato della C K, che è la metà del conjugato K L.

276. In terzo luogo, se dal punto P dell'iperbole tirisi la P S *s* parallela al diametro suo proprio M *m*, che s' incontri colli due asintoti ne' punti S, ed *s*; sarà al contrario il rettangolo delle due P S, P *s* eguale al quadrato della metà dello stesso diametro, ed in conseguenza eguale alla quarta parte della figura del suo conjugato K L. In fatti, essendo equiangoli, così li due triangoli P T S, M O C, come gl'altri due P *t s*, M R C, sarà il rettangolo delle due P S, P *s* al rettangolo

golo dell' altre due P T, P t, non solo in ragion composta di P S a P T, e di P s a P t, ma ancora in ragion duplicata delle due C M, M O, o pure delle due C M, C K. Onde, essendosi dimostrato, che il rettangolo delle due P T, P t sia eguale al quadrato della C K, sarà al contrario il rettangolo dell' altre due P S, P s eguale al quadrato della C M.

277. In quarto luogo, essendo eguali, e parallele le due O R, K L, chiaro si è, che li due asintoti siano diagonali altresì del parallelogrammo, che formasi colle rette, tirate talmente per gli vertici delli due diametri M m, K L, che siano reciprocamente parallele agli stessi diametri; onde gli stessi asintoti si potranno determinare, non solo colli due assi dell' iperbole, ma ancora con due qualsisiano diametri, che siano conjugati tra esso loro; nè vi sarà altro divario tra l' una, e l' altra determinazione, se non che li due angoli, che formano li due asintoti da ambedue le parti col loro incontro, resteranno divisi in parti eguali dalli due assi, ed al contrario in parti disuguali dalli due diametri.

278. Finalmente, conforme la tangente OR, tirata ad un punto M dell' iperbole, e terminata alli due asintoti, è di-

è divisa per metà nello stesso punto, ed è eguale, e parallela al conjugato del diametro Mm; così da questo stesso ricavasi, come dati li due asintoti possa descriversi l'iperbole in modo, che passi per un dato punto M. Tirisi perciò da questo punto la MV parallela ad uno delli due asintoti, che s'incontri coll'altro asintoto nel punto V; indi, fatta la VO eguale alla CV, congiungasi la OM, che s'incontri prolungata col primo asintoto nel punto R. E conforme la OR dee essere tangente dell'iperbole nel punto M, ed in conseguenza eguale, e parallela al conjugato del diametro Mm; così colla medesima si avranno li dati bastanti, per descrivere l'iperbole, che si dimanda.

279. Ma per ritornare alla proprietà, da cui si sono ricavate le riferite conseguenze, noteremo ora, che quantunque le due MS, PT non siano a dirittura coll'altre due Ms, Pt; pure il rettangolo delle due MS, Ms sarà eguale al rettangolo dell'altre due PT, Pt, sempre quando le quattro rette, che li contengono, siansi tirate in modo, che siano parallele tra di loro, tanto le due MS, PT, quanto l'altre due Ms, Pt; e ciò per la ragione, che essendo tuttavia equiangoli, così li *Fig.* 56.
due

due triangoli MOS, PRT, come gl' altri due Mos, Prt, pure li rettangoli delle due MS, PT nell' altre due Ms, Pt sono nella stessa ragion composta, in cui sono gl' altri rettangoli delle due MO, PR nell' altre due Mo, Pr.

280. Se poi le quattro rette MS, PT, Ms, Pt tirinsi con legge tale, che le prime due MS, PT siano parallele ad uno delli due asintoti, e l' altre due Ms, Pt parallele all' altro asintoto; chiaro si è, che queste due Ms, Pt siano eguali alle porzioni CS, CT del primo asintoto; onde il rettangolo delle due MS, CS similmente sarà eguale al rettangolo dell' altre due PT, CT. E per la stessa ragione, facendosi al contrario le prime due MS, PT eguali alle porzioni Cs, Ct dell' altro asintoto; ancora il rettangolo delle due Ms, Cs sarà eguale al rettangolo dell' altre due Pt, Ct.

281. Or il costume de' Geometri si è, di riguardare, come ordinate dell' asintoto le rette, che dalli punti dell' iperbole tiransi su di esso parallele all' altro asintoto; onde la proprietà dell' iperbole per rapporto all' asintoto sarà, che siano eguali tra di loro li rettangoli, fatti dall' ordinate nelle corrispondenti

denti porzioni dell' aſintoto, preſe dal centro. Conforme poi da ciò ne ſegue, che l'ordinate ſiano nella reciproca ragione delle ſteſſe porzioni; così non ſarà difficile ad intenderſi, che li due aſintoti debbano ſempre più accoſtarſi all' iperbole, ma non mai con eſſa incontrarſi.

282. In fatti, eſſendo l'ordinate di ciaſcuno delli due aſintoti reciprocamente proporzionali alle corriſpondenti porzioni dello ſteſſo aſintoto, preſe dal centro; chiaro ſi è, che ſiccome l'ordinate debbonſi tanto più minorare, quanto maggiormente diſcoſtanſi dal centro, così l'aſintoto, con diſtenderſi più oltre, debbaſi ſempre più approſſimare all' iperbole. Conforme poi a qualſiſia porzione d'aſintoto dee ſempre corriſpondere una qualche ordinata; così tra l'iperbole, ed il termine di quella porzione ſempre vi ſarà una qualche diſtanza, onde ſi è, che non mai l'aſintoto poſſa incontrarſi coll' iperbole.

283. Ciò però dee intenderſi di qualſiſia porzione d'aſintoto, che ſia di lunghezza finita; poichè, ſe mai la porzione ſia infinitamente lunga, la lunghezza dell' ordinata ad eſſa corriſpondente dovrà eſſere al contrario infinitamente picciola; onde preſſo a poco potrà dirſi, che in una diſtanza infinita dal

dal centro li due asintoti s' incontrino coll' iperbole. Possono adunque riguardarsi gli stessi asintoti come gl' ultimi diametri dell' iperbole; e considerandoli in questa guisa, si confonderanno con essi, così li conjugati degli stessi diametri, come le tangenti tirate ai loro vertici.

284. Ed in vero, facendosi di una lunghezza infinita la porzione dell' asse corrispondente ai vertici delli due ultimi diametri; le tangenti, tirate agli stessi vertici, s' incontreranno presso a poco coll' asse nel centro dell' iperbole; onde le stesse tangenti, confondendosi colli due diametri, si confonderanno altresì colli due asintoti: Debbonsi confondere poi cogli stessi asintoti eziandio li conjugati delli due ultimi diametri, per la ragione, che essi medesimi sono asintoti ancora dell' altra iperbole conjugata. Ed essendo così, eziandio nell' iperbole le due specie de' diametri saranno separate tra esso loro per mezzo di due diametri, eguali tanto tra di essi, quanto colli loro conjugati.

Fig. 57. 285. Finalmente all'iperbole, considerata per rapporto ai suoi asintoti, compete un' altra proprietà; e si è, che se ad un punto di essa M tirisi la tangente MT, che s'incontri con uno delli due asintoti nel punto T, e sullo stesso

ſteſſo aſintoto ſi abbaſſi l'ordinata MN; debba eſſere la ſottotangente N T eguale alla porzione dell' aſintoto C N, corriſpondente all' ordinata M N. In fatti, ſe prolunghiſi la tangente M T per ſino a che s' incontri coll' altro aſintoto nel punto R, ſaranno eguali le due M T, M R. Onde, eſſendo la M N parallela alla C R, ancora l' altre due N T, C N dovranno eſſere eguali: dal che ne ſegue, che li rettangoli fatti dall' ordinate nelle riſpettive ſottotangenti ſiano eziandio eguali tra di loro.

286. Notiſi quì intanto, che ſe AB ſia l' aſſe proprio dell' iperbole, e dal ſuo vertice A ſi abbaſſi ſopra uno delli due aſintoti l' ordinata A E, ſi faranno eguali le due C E, A E. La ragione è chiara; poichè, ſe allo ſteſſo vertice A tiriſi la tangente A F, che s' incontri collo ſteſſo aſintoto nel punto F, ſarà la C E eguale alla E F. Ma, per eſſere l' angolo C A F retto, il mezzo cerchio, deſcritto ſulla C F, come diametro, dee paſſare per lo punto A. Dunque, eſſendo E il centro di queſto mezzo cerchio, ſarà così la CE, come la EF eguale alla AE. E quindi ſi è, che al quadrato, tanto della AE, quanto della CE ſiaſi dato il nome di potenza dell' iperbole, in quan-

tochè al quadrato di ciascuna di esse dee essere da per tutto eguale il rettangolo, così delle due MN, CN, come delle due MN, NT.

287. Essendo così, niente sarà più facile, quanto di descrivere un'iperbole, di cui siano dati li due asintoti CX, CZ insieme col lato della sua potenza. Taglisi perciò da uno delli due asintoti la porzione CE eguale al lato dato della potenza, indi tirisi la EA parallela all'altro asintoto, ed eguale alla CE; e conforme la CA dee essere la metà dell' asse proprio dell' iperbole, così se dallo stesso asintoto taglisi in appresso la EF similmente eguale alla CE, sarà la AF eguale alla metà dell' asse conjugato; onde, con esser noti li due assi, si potrà facilmente descrivere l' iperbole ricercata. Anzi in questa maniera potrà descriversi ancora l' iperbole, che avendo per asintoti le due CX, CZ passi per un dato punto M, per la ragione, che abbassata sopra uno delli due asintoti la MN parallela all' altro asintoto, e ritrovata tra le due CN, MN la mezza proporzionale, si avrà con essa il lato della potenza dell' iperbole.

§. XXI.

§. XXI.

Della mutua corrispondenza delle tre curve.

288. DImostrate le proprietà principali, così della parabola, come dell' ellisse, e dell' iperbole, soggiungeremo ora alcune riflessioni intorno alla mutua corrispondenza delle stesse curve. Ed in vero è tale la loro connessione, che sembrano essere più tosto diverse modificazioni di una stessa curva. In fatti, considerandole nel cono, da cui ricavansi, si ha l'ellisse, quante volte il piano secante incontrasi al di sotto del vertice del cono coll' altro lato del triangolo, tagliato dallo stesso cono per un piano, che passi per l' asse. Ma la stessa ellisse, siccome cambiasi in parabola, qualora il piano secante si fa parallelo all' altro lato del triangolo; così si cambierà in iperbole, sempre quando lo stesso piano secante incontrasi coll' altro lato del triangolo al di sopra del vertice del cono.

289. Ma, senza considerare le tre curve, secondochè ricavansi dal cono, egli è facile ad intendersi, che l' ellisse primieramente debba cambiarsi in parabola, con farsi l' altro vertice del suo

asse infinitamente distante dal primo; ed indi trasformarsi in iperbole, con discostarsi l' altro vertice talmente dal primo, che passi dal lato opposto: come in fatti, con supporre l'asse dell'ellisse di una lunghezza, ora infinita, ed ora più che infinita, cioè negativa, possono dedursi dalle stesse sue proprietà, così quelle della parabola, come l'altre dell'iperbole.

Fig. 58. 290. Ed in vero, se A B sia l'asse dell'ellisse, chiaro si è, che con farsi egli di una lunghezza infinita, facciasi infinitamente distante dal vertice A, non solo l'altro B, ma ancora il centro C, che divide l'asse per metà; onde gl' altri diametri, che intersegansi nel centro C, si faranno paralleli così coll'asse, come tra essi loro. Se poi M N, P Q siano due ordinate dello stesso asse, li loro quadrati dovranno essere nella semplice ragione delle porzioni A N, A Q, prese dal vertice A, e corrispondenti alle stesse ordinate; in quantochè l' altre due porzioni B N, B Q, facendosi di una lunghezza infinita, ed essendo differenti tra di esse per la porzione finita N Q, debbono aversi come eguali tra di loro.

291. Con farsi l' asse A B di una lunghezza infinita, dee essere altresì il quadrato dell' ordinata M N eguale al ret-

rettangolo del parametro dell' asse A B nella corrispondente porzione AN. Sia perciò A H il parametro dell'asse A B, situato nel vertice A in modo, che sia parallelo all' ordinata M N. Se adunque congiungasi la B H, con cui vadasi ad incontrare l' ordinata M N nel punto O; sarà il quadrato della stessa M N eguale al rettangolo delle due A N, N O. Ma, con farsi l'altro vertice B infinitamente distante dal primo A, siccome si fanno parallele le due A B, H B; così, facendosi la N O eguale al parametro A H, sarà il quadrato dell' ordinata M N eguale al rettangolo del parametro A H nella porzione A N.

292. Questa stessa uguaglianza può dedursi ancora da ciò, che nell' ellisse il quadrato dell' ordinata M N sia al rettangolo delle due porzioni AN, BN, come A H ad A B. Imperocchè, essendo A H ad A B, come il rettangolo delle due A H, A N al rettangolo dell' altre due A B, A N; sarà nella ragione di questi stessi rettangoli ancora il quadrato dell' ordinata M N al rettangolo delle due porzioni A N, B N. Ma, con essere l' altro vertice B infinitamente distante dal primo A, si fa eguale, così la B N all' asse A B, come il rettangolo delle due A N, B N

 al

al rettangolo dell' altre due AB, AN. Dunque ancora il quadrato dell' ordinata MN dovrà farsi eguale al rettangolo del parametro AH nella porzione corrispondente AN.

293. Or avendo gl' altri diametri dell' ellisse la stessa proprietà del suo asse; chiaro si è, che quel tanto avviene all' ordinate dell' asse AB, con farsi infinita la sua lunghezza, debba avvenire ancora all' ordinate di ogn' altro diametro; anzi dal teorema dimostrato nell' ellisse, per la ricerca degl' altri diametri, deducesi ancora quello premesso nella parabola per la ricerca de' suoi. In fatti se AB sia l' asse dell' ellisse, e la D*d* tirata per lo centro C divida per metà nel punto E l' altra AM, si dimostrò, che abbassata sull' asse AB l' ordinata DF, sia CE a CD, come CF a CA. Ma, conforme dividendo dee essere ancora DE a CD, come AF a CA; così, con farsi il centro C infinitamente distante dal vertice A, si fanno le due CD, CA, non solo parallele, ma eguali ancora tra di loro; onde eziandio le due DE, AF dovranno essere eguali, siccome fu dimostrato nella parabola.

294. Nella stessa supposizione di essere infinita la lunghezza dell'asse AB, siccome il diametro D*d* si fa eguale all'

all' asse A B, così le loro figure saranno nella semplice ragione de' loro parametri; e quindi si è, che li quadrati delle due ordinate D F, A E, conforme nell' ellisse sono, come la figura dell' asse A B alla figura del diametro Dd, così nella parabola siano, come li soli loro parametri. E poichè nella medesima supposizione si fanno eguali tra di loro tutti li diametri; quindi ancora si è, che le proprietà dell' ellisse, in cui le quantità, che pongonsi a calcolo, sono come le figure di due diametri, nella parabola siansi concepite in modo, che le stesse quantità sono nella semplice ragione de' loro parametri.

295. Quantunque poi li diametri dell' ellisse abbiano li loro conjugati, nientedimeno nella parabola quest' altri diametri non possono porsi a calcolo per la ragione, che cambiandosi l' ellisse in parabola, essi si fanno infinitamente distanti dal suo asse. In fatti, *Fig.* se D d sia l' altro asse dell' ellisse, e li 59. diametri, che dividono le due A D, A d per metà, siano M m, P p; chiaro si è, che facendosi il centro C infinitamente distante dal vertice A, debbano farsi, non solo di una lunghezza infinita le due A D, A d, ma infinitamente distanti ancora dall'asse AB li

li due diametri Mm, Pp; onde, tanto questi due diametri, quanto gl'altri, che seguono dopo di essi saranno in situazione tale, che non possono essere da noi considerati.

296. Or, siccome Mm, Pp sono li due diametri dell'ellisse, che essendo conjugati tra esso loro, sono eguali tanto tra di essi, quanto colli loro parametri; così per mezzo degli stessi due separansi gl' altri diametri dalli loro conjugati; come in fatti li diametri, corrispondenti alle due porzioni dell'ellisse AM, AP, debbono avere per loro conjugati gl'altri, che corrispondono all' altre due porzioni contrarie dP, DM. Ed essendo così, vedesi ancora, che facendosi l' asse AB di una lunghezza infinita, non già l'intera ellisse, ma la sola porzione di essa MAP somministra alla parabola, così gl' infiniti suoi diametri, come l' infinita sua estensione.

Fig. 59. 297. La proprietà della tangente della parabola, eziandio deducesi da quella dell'ellisse. In fatti, se la MT tocchi l' ellisse in un qualche punto M, e la medesima s' incontri con uno de' suoi diametri AB nel punto T; dimostrammo, che abbassandosi dal punto del contatto M sullo stesso diametro l' ordinata MN, siano le tre CN,

CA,

CA, CT continuamente proporzionali, ed in conseguenza, che CN sia a CA, come CA a CT. Or, conforme con togliere li termini della prima ragione dalli termini della seconda, dee essere altresì CN a CA, come AN ad AT; così, con farsi il centro C infinitamente distante dal vertice A, si fanno eguali le due CN, CA; e pertanto ancora l'altre due AN, AT dovranno essere eguali.

298. Se poi AB sia l' asse dell' ellisse, e la perpendicolare MS, alzata dal punto del contatto M sulla tangente MT, s' incontri con esso nel punto S; dimostrammo parimente, che essendo AH il parametro dell' asse AB, sia NS a CN, come AH ad AB; ma da questo stesso ricavasi, che nella parabola NS debba essere eguale alla metà del parametro AH; poichè, facendosi il centro C infinitamente distante dal vertice A, si fanno eguali le due CN, CA; onde NS sarà a CA similmente, come AH ad AB; e per tanto, conforme CA è eguale alla metà dell' asse AB, così la sottonormale NS sarà eguale alla metà del parametro AH.

299. Finalmente, se F, ed *f* siano li due fochi dell' ellisse, ed essendo CF a CA, come CA a CG, sia la per-

pendicolare GK alzata sulla CG la sua direttrice; chiaro si è, che conforme nella parabola dee porsi a calcolo il solo foco F per la ragione, che la distanza dell' altro *f* dal vertice A diventa infinita; così debba determinarsi in essa la direttrice GK, con fare la AG eguale alla AF: come in fatti essendo CF a CA, come CA a CG; sarà dividendo CF ad AF, come CA ad AG; onde, con farsi il centro C infinitamente distante dal vertice A, siccome si fanno eguali le due CF, CA, così ancora l' altre due AF, AG dovranno essere eguali; e per la stessa ragione la MF dovrà essere eguale, non solo alla perpendicolare MK, abbassata dal punto del contatto M sulla direttrice GK, ma ancora a ciascuna delle due TF, SF.

300. Notisi perciò, che nell' ellisse, conforme fu dimostrato, che MF sia ad SF, come CA a CF; così la stessa MF debba essere a TF, come CN a CA. In fatti, essendo continuamente proporzionali, così le tre CF, CA, CG, come le tre CN, CA, CT; sarà il quadrato della CA eguale, così al rettangolo delle due CF, CG, come al rettangolo dell'altre due CN, CT; onde, dovendo essere eguali tra di loro questi due rettangoli, sarà

ſarà CN a CG, come CF a CT; ed in conſeguenza dividendo CN ſarà ad NG, come CF a TF. Ma NG ſta ad MF, come CA a CF. Dunque, ſiccome perturbando dee eſſere CN ad MF, come CA a TF; così permutando ſarà CN a CA, come MF a TF: dal che ne ſegue, che le due SF, TF ſiano nella ſteſſa ragione colle due CN, CG.

301. Con eſſere poi infinita la diſtanza dell' altro foco *f* dal vertice A, dee farſi la M*f* non ſolo di una lunghezza infinita, ma parallela altresì all' aſſe AB; e quindi ſi è, che nella parabola formino angoli eguali colla tangente MT la MF, tirata al foco F, e la retta, che tiraſi parallela allo ſteſſo aſſe. E poichè la M*f*, con farſi di una lunghezza infinita, ſi confonde col diametro, che ha per vertice il punto del contatto M; quindi ancora ſi è, che nella parabola, tanto la MF, quanto ciaſcuna delle ſue eguali MK, TF, SF, ſia eguale alla quarta parte del parametro, che rapportaſi allo ſteſſo diametro; anzi dall' unione della M*f* col riferito diametro deriva, che l' ordinata tirata per lo foco F tagli da eſſo una porzione ſimilmente eguale alla quarta parte dello ſteſſo parametro.

Fig. 59. 302. Or, conforme l' elliſſe cambiaſi in parabola, con farſi infinita la lunghezza dell' aſſe A B; così, ſe la lunghezza del medeſimo aſſe facciaſi più che infinita, cioè negativa, ſi cambierà in iperbole la ſteſſa elliſſe. In fatti, affinchè l' altro vertice B poſſa paſſare dal lato oppoſto, e farſi in conſeguenza negativa la lunghezza dell'aſſe AB, fa duopo, che egli faccia intorno al primo vertice A un giro infinito; ma nel mentre, che tanto da eſſo, quanto dal centro C ſi fa un tale giro, le quattro porzioni MAP, *m*B*p*, MD*p*, P*dm*, in cui dividono l'elliſſe li due diametri eguali M*m*, P*p*, non ſolo acquiſtano infinita eſtenſione, ma diſpongonſi altresì in modo, che colle due prime ſi hanno le due iperboli principali, e coll' altre due le loro conjugate; delle quali iperboli ſi fanno non meno tangenti, che aſintoti comuni li due diametri eguali M*m*, P*p*.

303. Per l' intelligenza di ciò, noteremo primieramente, che ſe bene le quattro riferite porzioni reſtino ſempre unite per ſino a che dal vertice A diſcoſtaſi infinitamente l' altro B; nientedimeno, qualora queſt' altro vertice da quella infinita diſtanza ritorna verſo A per lo lato oppoſto, rimane nella ſua ſituazione la prima porzione MAP,

e con

e conduce egli seco le sole tre rimanenti. Anzi, perchè insieme con esso ritorna ancora verso A il centro C; quindi si è, che li due diametri eguali, che diventano paralleli in quella stessa infinita distanza, interseghinsi nel ritorno dal lato opposto, e racchiudano nel loro angolo la rimasta porzione MAP.

304. Noteremo in secondo luogo, che il ritorno del vertice B verso A per lo lato opposto debba farsi per fino a che colla loro distanza facciasi l'asse AB della stessa lunghezza di prima; onde giunto, che egli sarà ad una tale situazione, rimanerà con esso la porzione mBp, e l'altre due passeranno più oltre insieme col centro C, che dee arrestarsi in quel punto, che divide lo stesso asse per metà. E siccome in questo stesso punto intersegansi finalmente li due diametri eguali Mm, Pp, così resteranno racchiuse nelli loro angoli verticali ambedue le porzioni MAP, mBp, di cui saranno asintoti, e tangenti insieme gli stessi diametri, per essersi fatte d'infinita estensione, tanto le due porzioni, quanto li due diametri.

305. Noteremo in terzo luogo, che se bene, discostandosi dal vertice A infinitamente l'altro B, ancora l'altro asse Dd facciasi di una lunghezza infinita

finita ; nientedimeno nel ritorno dello ſteſſo vertice verſo A per lo lato oppoſto, la ſua lunghezza minoraſi gradatamente, e riduceſi finalmente a quella di prima ; onde ſi è , che colla ſua diminuzione le rimanenti due porzioni M D *p*, P *d m* da concave, che prima erano verſo il centro C, diventino conveſſe ; e rimanendo racchiuſe negl' altri due angoli verticali , che formano col loro interſegamento li due diametri eguali M *m* , P *p* , abbiano anche eſſe per loro tangenti , ed aſintoti gli ſteſſi diametri.

306. Noteremo finalmente , che il cambiamento in iperbole delle due porzioni M A P, *m* B *p* avviene propriamente nel ritorno del vertice B verſo A per lo lato oppoſto . In fatti con queſto ritorno il centro C avvicinaſi ſempre più al vertice A ; onde facendoſi ſempre più maggiore l' angolo , che formano nello ſteſſo centro li due diametri eguali M*m* , P*p* ; le due porzioni M A P, *m* B *p*, di cui ſono tangenti gli ſteſſi diametri, ſi slargano ſempre più ; ed in conſeguenza da parabole, in cui eranſi cambiate nell' infinita diſtanza delli due vertici, diventano iperboli . E lo ſteſſo avviene all' altre due porzioni M D *p*, P *d m* , che colla diminuzione , che ſoffre la lunghez-

ghezza infinita dell' altro asse D d, da concave, che prima erano verso il centro C, diventano convesse.

307. Vedesi intanto, che qualora l' ellisse cambiasi in iperbole, non si fa altro cambiamento nelle sue proprietà, se non se quello, che deriva dalla contraria situazione delle rette, che le riguardano; ed un tal cambiamento avviene altresì ai conjugati delli suoi diametri; poichè, se bene nell' ellisse alla porzione M A P siano aderenti le due D M, d P, ed all' altra m B p l' altre due D p, $d\,m$; nientedimeno nell' iperbole queste due ritrovansi situate presso la prima M A P, e l' altre due presso l' altra m B p; onde si è, che confondonsi cogli stessi asintoti, tanto li due ultimi diametri, qunnto li loro conjugati.

308. Del rimanente egli è facile ad intendersi, che così nell' ellisse, come nell' iperbole, secondo variasi la ragione, che serbano tra di essi li loro assi, debba variare altresì la loro specie; onde due ellissi, o due iperboli debbonsi avere come simili, sempre quando li due assi di una di esse sono nella stessa ragione colli due assi dell' altra. Ma non avviene lo stesso alla parabola; poichè, se bene ella per ragion del parametro del suo asse possa essere di mag-

maggiore, o minore ampiezza; nientedimeno la sua specie è sempre la stessa, onde si è, che tutte le parabole siano simili; il che ricavasi ancora chiaramente dalla maniera, con cui deduconsi dal cono le tre curve.

§. XXII.

Degli spazj racchiusi dalle stesse tre curve.

309. PAsseremo ora a considerare gli spazj, che racchiudono le stesse curve colli loro assi, e colle loro ordinate. Ed incominciando da quello della parabola, che può determinarsi con esattezza, sia AB il suo asse, ed
Fig. MN una delle sue ordinate. Compi-
60. scasi il parallelogrammo NO, ed io dico, che di questo parallelogrammo ne contenga li due terzi lo spazio parabolico AMN, ed in conseguenza che lo stesso spazio sia duplo dell'altro esteriore AMO. Per dimostrarlo, pongasi, che la *mn* sia un' altra ordinata talmente vicina alla prima MN, che l'archetto M*m* della parabola possa riguardarsi come una picciola retta; e pongasi altresì, che la *mo* parallela alla MO s' incontri colla MN nel punto *r*.

310.

310. Potendosi adunque riguardare l'archetto M*m* come una picciola retta, col medesimo prolungato si avrà la tangente della parabola MT. Onde, facendosi il triangolo MNT equiangolo coll' altro picciolo M*rm*, sarà MN ad NT, come M*r* ad *rm*, o pure come O*o* ad N*n*; e per tanto il rettangolo delle due MN, N*n*, o sia il picciolo quadrilatero MN*nm* sarà eguale al rettangolo dell' altre due NT, O*o*. Ma, per essere la NT dupla della AN, ovvero MO, il rettangolo delle due NT, O*o* è duplo dell'altro picciolo quadrilatero MO*om*. Dunque ancora il primo picciolo quadrilatero MN*nm* sarà duplo di quest'altro MO*om*; ed in conseguenza, avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, sarà lo spazio parabolico AMN eziandio duplo dell'altro esteriore AMO.

311. Se PQ sia un' altra ordinata dell' asse AB, e compiscasi l' altro parallelogrammo QR, sarà lo spazio parabolico APQ similmente duplo dell' altro esteriore APR. Quindi, tanto li due spazj interiori AMN, APQ, quanto gl' altri due esteriori AMO, APR, come parti simili delli due parallelogrammi NO, QR, saranno con essi nella stessa ragione; dal che ne segue, che gli stessi spazj siano, come li

cubi

cubi dell'ordinate MN, PQ; poichè, ſiccome li due parallelogrammi NO, QR ſono tra eſſo loro in ragion composta di MN a PQ, e di AN ad AQ; così, attenta l'indole della parabola, le due AN, AQ ſono in ragion duplicata dell'altre due MN, PQ.

312. Per quanto poi agli ſpazj, che l'elliſſe, e l'iperbole racchiudono colli loro aſſi, e colle loro ordinate, queſti non poſſono averſi con eſattezza, ma ſoltanto per via di approſſimazione. *Fig.* Sia perciò primieramente l'elliſſe AMB, *61.* e ſull'aſſe di eſſa AB ſi abbaſſi da uno de' ſuoi punti l'ordinata MN. Deſcrivaſi ſullo ſteſſo aſſe il mezzo cerchio AOB, colla di cui circonferenza s'incontri l'ordinata MN nel punto O, e ſia D*d* l'altro aſſe dell'elliſſe. Io dico, che lo ſpazio ellittico AMN ſia al corriſpondente ſpazio circolare AON nella ſteſſa ragione, in cui ſono li due aſſi dell'elliſſe D*d*, AB, o pure le loro metà CD, CA.

313. Per dimoſtrarlo, pongaſi, che *mn* ſia un'altra ordinata infinitamente vicina alla prima MN, che s'incontri colla circonferenza del mezzo cerchio nel punto *o*. Siccome adunque, per l'elliſſe, il quadrato dell'ordinata MN ſta al rettangolo delle due AN, BN,

come

come il quadrato della CD al quadrato della CA; così, per lo mezzo cerchio, il rettangolo delle due AN, BN è eguale al quadrato della ON. Onde, dovendo essere li quadrati delle due MN, ON nella stessa ragione colli quadrati dell'altre due CD, CA, sarà MN ad ON, come CD a CA. Ma li due piccioli quadrilateri MN*nm*, ON*no* sono tra di loro, come MN ad ON. Dunque gli stessi piccioli quadrilateri saranno altresì, come CD a CA; ed in conseguenza, avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, ancora li due spazj AMN, AON saranno tra esso loro, come CD a CA.

314. Se poi congiungansi le due CM, CO, similmente il settore ellittico ACM dovrà essere al corrispondente settore circolare ACO, come CD a CA. In fatti, essendo MN ad ON, come CD a CA, li due triangoli CMN, CON saranno nella stessa ragione colli due spazj AMN, AON; onde, congiungendo li termini della prima ragione colli termini della seconda, sarà il settore ACM al settore ACO, come lo spazio AMN allo spazio AON; e per tanto, conforme questi due spazj sono tra di loro, come CD a CA; così nella stessa ra-

ragione di C D a C A dovranno essere altresì li due settori A C M, A C O.

315. Vedesi intanto, che nella ragione di C D a C A debbano essere ancora, così gl' altri due spazj BMN, BON, come gl' altri due settori BCM, BCO. E poichè nella stessa ragione dee essere similmente l' intero spazio ellittico A M B all' intero spazio circolare A O B, si potranno da ciò dedurre due conseguenze; di cui una si è, che lo spazio, contenuto da qualsisia ellisse, sia eguale al cerchio, che ha per diametro la mezza proporzionale tra li due assi della stessa ellisse; e l' altra si è, che gli spazj, compresi da due diverse ellissi, siano tra di loro in ragion composta delli loro assi, tantochè, se gl' assi di una di esse siano nella reciproca ragione degl' assi dell' altra, gli spazj, contenuti dalle due ellissi, dovranno essere eguali.

316. Poichè dunque sono in data ragione, così li due spazj AMN, AON come li due settori A C M, A C O; chiaro si è, che con determinare il settore A C O, ed in conseguenza lo spazio A O N, resti determinato altresì, così l' altro settore A C M, come l'altro spazio A M N. Or il valore del settore A C O non può aversi altrimente, se non se per via di approssimazione;

ne; poichè, se bene siasi dimostrato, che il riferito settore sia eguale ad un triangolo, che ha per base una retta eguale all' arco A O, e per altezza il raggio CO; nientedimeno, siccome non può determinarsi con esattezza l' intera circonferenza di un cerchio, così nè tampoco può definirsi esattamente la lunghezza di qualsisia arco circolare.

317. Per dimostrare intanto, come con esser data l' ordinata dell' ellisse MN possa determinarsi presso a poco l' arco A O. per definire in appresso il settore A C O; si vuol prima notare, che siccome la perpendicolare O N, abbassata dall' estremità dell' arco A O sul raggio C A, appellasi seno dello stesso arco; così con calcolo molto penoso si sono determinati li valori, che hanno per rapporto ad un dato raggio li seni di tutti gl' archi, incominciando da quello di un minuto per fino al quadrante; e li valori di questi seni ritrovansi registrati nel canone, che chiamasi trigonometrico per l' uso, che fa di esso la Trigonometria nella risoluzione de' triangoli.

318. Per mezzo del canone adunque trigonometrico, egli è facile, di determinare il valore dell' arco A O, essendo data l' ordinata dell' ellisse M N. In fatti, con essere data la MN, potrà de-

determinarſi l' altra O N, che è il ſeno dell' arco AO, per eſſere MN ad ON, come C D a C A. Onde, ſe facciaſi, come C O ad O N, così il raggio del canone trigonometrico ad un quarto proporzionale, e veggaſi nello ſteſſo canone, di quanti gradi, e minuti ſia l' arco, a cui corriſponde come ſeno il quarto proporzionale ritrovato; chiaro ſi è, che di altrettanti gradi, e minuti debba eſſere ancora l' arco AO; e per tanto, con eſſere noto il numero de' gradi, e minuti, contenuti nell' arco A O, ſarà nota altresì la ragione, che lo ſteſſo arco ſerba coll' intera circonferenza del cerchio, che ha per diametro l' aſſe dell' elliſſe A B.

319. Quindi, ſe determiniſi l'intera circonferenza di queſto cerchio ſecondo il teorema di Archimede, che il diametro ſia alla circonferenza di qualſiſia cerchio quaſi, come 7 a 22; potrà determinarſi altresì la lunghezza dell' arco A O. Onde ſiccome, moltiplicando lo ſteſſo arco per la metà del ſuo raggio C O, ſi ha il ſettore A C O; così, ſe ritrovaſi in appreſſo un'altro ſpazio, che ſia al ſettore A C O, come C D a C A, ſi avrà con queſt' altro ſpazio il ſettore ellittico A C M. Ed in fine, ſe per mezzo del triangolo rettangolo C N O determiniſi la C N, reſterà determinarſi [...]

ter-

terminato ancora il triangolo C N M, che tolto dal settore A C M ci darà col residuo lo spazio ellittico A M N.

320. Per schiarirlo con qualche esempio, pongasi, che l'asse A B sia diviso in 20 parti eguali, e che di esse ne contenga 10 l'altro asse *Dd*, e 4 l'ordinata M N. Essendo adunque M N ad O N, come C D a C A, contenerà la O N 8 delle stesse parti; e se facciasi, come C O ad O N, così il raggio del canone trigonometrico ad un quarto proporzionale, si ritroverà, che egli sia 8000000. Onde, essendo questo quarto proporzionale presso a poco seno di un'arco di 53 gradi, e 8 minuti, ancora l'arco A O sarà di altrettanti gradi, e minuti; e per tanto, se riducansi a minuti eziandio li gradi, sarà l'arco A O all'intera circonferenza del cerchio, che ha per diametro l'asse dell'ellisse A B, come 3188 a 21600, o pure come 797 a 5400.

321. Quindi, siccome delle parti eguali, in cui si è supposto diviso l'asse A B, secondo il teorema di Archimede, dee contenerne la circonferenza di quel cerchio 62, e $\frac{6}{7}$; così l'arco AO ne contenerà presso a poco 9'278. Onde delle medesime parti quadrate dovrà contenerne 46'39 il settore circulare A C O, e 23'195 il settore ellit-

ellittico ACM. Essendo poi 36 la differenza tra li quadrati delle due CO, ON; chiaro si è, che delle parti dell' asse AB debba contenerne 6 la CN; e per tanto, conforme delle stesse parti quadrate ne contiene 24 il triangolo CNO, e 12 il triangolo CNM; così dovrà contenerne 22'39 lo spazio circolare AON, e 11'195 lo spazio ellittico AMN.

322. Or l' analogia stessa, che vi è tra la circonferenza del cerchio, e l' iperbole equilatera, dee esserci di argomento, che lo spazio, che racchiude qualsisia iperbole col suo asse, e con una delle sue ordinate, debba ripetersi da un spazio consimile dell' iperbole equilatera. Sia perciò AM un' iperbole qualsivoglia, di cui AB sia l' asse proprio, D*d* l' altro conjugato, ed MN un' ordinata del primo asse. Descrivasi collo stesso asse AB l' iperbole equilatera AO, che s' incontri coll' ordinata MN nel punto O. Io dico, che lo spazio AMN della prima iperbole sia al corrispondente spazio AON dell' altra iperbole equilatera nella stessa ragione, in cui sono li due assi D*d*, AB o pure le loro metà CD, CA.

Fig. 62.

323. Per dimostrarlo, pongasi, che *mn* sia un' altra ordinata infinitamente vicina alla prima MN, con cui s' incon-

contri l' iperbole equilatera nel punto O. Siccome adunque per la prima iperbole il quadrato dell' ordinata MN sta al rettangolo delle due AN, BN, come il quadrato della CD al quadrato della CA; così, per l' altra iperbole equilatera, il rettangolo delle due AN, BN è eguale al quadrato della ON. Onde, dovendo essere li quadrati delle due MN, ON nella stessa ragione colli quadrati dell' altre due CD, CA, sarà MN ad ON, come CD a CA. Ma li due piccioli quadrilateri MN*nm*, ON*no* sono tra di loro, come MN ad ON. Dunque gli stessi piccioli quadrilateri saranno altresì, come CD a CA; ed in conseguenza, avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, ancora li due spazj iperbolici AMN, AON saranno tra esso loro, come CD a CA.

324. Se poi congiungansi le due CM, CO, similmente li due settori ACM, ACO delle due iperboli dovranno essere tra di loro, come CD a CA. In fatti, essendo MN ad ON, come CD a CA, li due triangoli CMN, CON saranno nella stessa ragione colli due spazj AMN, AON; onde, togliendo li termini della seconda ragione dalli termini della prima, sarà il settore ACM al settore ACO, come

come lo ſpazio AMN allo ſpazio AON; e per tanto, conforme queſti due ſpazj ſono tra di loro, come CD a CA, così nella ſteſſa ragione di CD a CA dovranno eſſere altresì li due ſettori ACM, ACO.

325. Poichè dunque ſono in data ragione, così li due ſpazj AMN, AON, come li due ſettori ACM, ACO; chiaro ſi è, che con determinare il ſettore ACO, ed in conſeguenza lo ſpazio AON, reſti determinato ancora, così l'altro ſettore ACM, come l'altro ſpazio AMN. Or il valore del ſettore ACO non può averſi altrimente, ſe non ſe per via di approſſimazione; ma l'artificio, che deeſi impiegare, per la ricerca del proſſimo ſuo valore, è molto diverſo da quello, che impiegaſi, per ritrovare il valore approſſimante di un ſettore circolare; onde, per l'intelligenza di eſſo, ſiano CX, CZ li due aſintoti dell' iperbole equilatera AO, e su 'l primo di eſſi CX ſi abbaſſino l'ordinate AE, OR. Io dico, che il ſettore ACO ſia eguale allo ſpazio AERO, compreſo tra le due ordinate AE, OR.

326. In fatti, attenta la proprietà dell' iperbole per rapporto ai ſuoi aſintoti, il rettangolo delle due AE, CE è eguale al rettangolo dell' altre due OR,

OR, CR; onde, essendo CE a CR, come OR ad AE, saranno eguali li due triangoli ACE, OCR; e pertanto, conforme tolto da essi il comune triangolo CEF, rimane il triangolo ACF eguale al trapezio EFOR, così, aggiungendo a questi residui il comune triangolo mistilineo AFO, sarà il settore ACO eguale allo spazio AERO. Attenta adunque questa uguaglianza, esamineremo ora, se negli spazj, compresi tra l'ordinate dell'asintoto CX s'incontri qualche proprietà, per mezzo di cui possano aversi presso a poco li loro valori.

327. Ed in vero nelli riferiti spazj *Fig. 63.* incontrasi una proprietà molto rilevante; e si è, che essendo continuamente proporzionali le tre porzioni dell'asintoto CE, CR, CQ, siano eguali gli spazj, compresi tra l'ordinate AE. OR, PQ, corrispondenti alle stesse porzioni. Per dimostrarla, pongasi, che l'altre due porzioni Cr, Cq dello stesso asintoto siano, non solo infinitamente vicine alle prime CR, CQ, ma tali ancora, cha CR sia a Cr, come CQ a Cq; e siano or, pq l'ordinate corrispondenti a quest'altre due porzioni Cr, Cq.

328. Poichè dunque CR sta a Cr, come CQ a Cq; sarà dividendo CR

I 2 ad

ad Rr, come CQ a Qq; ed in conseguenza permutando CR sarà a CQ, come Rr a Qq. Ma, per la proprietà degl' asintoti, CR sta a CQ, come PQ ad OR. Dunque ancora PQ sarà ad OR, come Rr a Qq; e per tanto li due piccioli quadrilateri $ORro$, $PQqp$ saranno tra di loro eguali. Della stessa maniera si dimostrerà, che prendendosi altre porzioni infinitamente vicine alle precedenti, e proporzionali alle stesse due CR, CQ, siano eguali li piccioli quadrilateri, che tra esso loro si corrispondono. Dunque, terminandosi queste tali porzioni alle due CE, CR, sarà lo spazio $AERO$ eguale similmente allo spazio $ORQP$.

329. Pongasi ora, che le porzioni CE, CR, CQ, CV &c., prese sull' asintoto CX, si avanzino per differenze infinitamente picciole in modo, che formino insieme una progressione geometrica. Essendo adunque eguali li piccioli spazj, compresi tra l'ordinate AE, OR, PQ, SV &c., corrispondenti alle stesse porzioni; chiaro si è, che gl' altri spazj $AERO$, $AEQP$, $AEVS$, &c., li quali si hanno colla continua aggiunta delli primi, debbano formare al contrario una progressione aritmetica. Onde, siccome quest' altri spazj debbono aversi, come logaritmi delle por-

porzioni dell' aſintoto, a cui corriſpondono; così per mezzo delli logaritmi, che già abbiamo, potrà definirſi preſſo a poco il valore di qualſiſia ſpazio, compreſo tra due ordinate dello ſteſſo aſintoto.

330. Perciò egli è da notarſi, che ſiccome chiamanſi logaritmi li numeri in progreſſione aritmetica, che corriſpondono ad altri in progreſſione geometrica; così, per facilitarſi di molto con sì fatti numeri le operazioni più compoſte dell' Aritmetica, cioè la moltiplicazione, la diviſione, la formazione delle potenze, e l' eſtrazione delle radici; ſi è ſtimato profittevole, di formare un canone, che inſieme colli numeri naturali contenga ancora li loro logaritmi; e la formazione di eſſo ſi è fatta con legge tale, che ſia zero il logaritmo dell' unità, 1 il logaritmo di 10, 2 il logaritmo di 100, 3 il logaritmo di 1000, 4 il logaritmo di 10000, e così degl' altri conſecutivi.

331. Conforme poi, con inſerire ſempre più nuovi termini nella progreſſione geometrica 1, 10, 100, 1000, 10000, &c., ſi ſono ripoſti in eſſa preſſo a poco ancora gl' altri numeri naturali; così ſi ſono ritrovati li logaritmi di queſt' altri numeri, con inſerire altrettanti termini nella progreſſio-

ne aritmetica 0, 1, 2, 3, 4, &c.; ed affinchè li logaritmi di quest' altri numeri si potessero esprimere con numeri interi, si sono aumentati di più zeri li termini stessi di quest' altra progressione: come in fatti nel canone logaritmico, che abbiamo, vedesi essere 10000000 il logaritmo di 10, 20000000 il logaritmo di 100, 30000000 il logaritmo di 1000, e così degl' altri.

332. Si è preso intanto il zero per logaritmo dell'unità, per facilitare maggiormente il calcolo delle riferite operazioni aritmetiche; ed in fatti da un tale stabilimento ne segue I, che con aggiungere il logaritmo del moltiplicatore al logaritmo del moltiplicando si abbia il logaritmo del prodotto; II, che con togliere il logaritmo del divisore dal logaritmo del dividendo, si abbia il logaritmo del quoziente; III, che con prendere il duplo, o il triplo del logaritmo di un qualche numero, si abbia il logaritmo del suo quadrato, o del suo cubo; e IV finalmente, che con prendere la metà, o la terza parte del logaritmo di un qualche numero, si abbia il logaritmo della sua radice quadrata, o della sua radice cubica.

333. Colle prime tre di queste conseguenze, non solo nella formazione del canone si sono ritrovati più facilmente li

li logaritmi di moltissimi numeri; ma si può estendere ancora più oltre lo stesso canone, che giunge per sino al logaritmo del numero 10000; anzi, per mezzo di esse, possono ritrovarsi altresì li logaritmi, così delli numeri rotti, come degl' interi, che ritrovansi accoppiati con rotti. Ed egli è da notarsi, che siccome il logaritmo di qualsisia rotto dee essere negativo, per la ragione, che il logaritmo del suo numeratore è minore del logaritmo del suo denominatore; così, se il rotto sia così picciolo, che quasi niente differisca dal zero, il suo logaritmo debba essere al contrario quasi infinito.

§. XXIII.

Dell' indole delli logaritmi iperbolici.

334. PEr ritornare ora ai logaritmi, che ci somministra l' iperbole equilatera colli riferiti spazj, prendasi per unità la porzione dell' asintoto CE, che corrisponde al vertice *Fig.*
principale A della stessa iperbole, e che è 64.
eguale in conseguenza alla sua ordinata AE. L' altre porzioni adunque CR, CQ, CV, &c. dello stesso asintoto, che formano con quella prima la progressione geometrica, e che si avanza-

 no

no per differenze infinitamente picciole, ci additeranno, non solo li numeri naturali, che seguono dopo l'unità, ma gl' altri ancora, che accoppiati con rotti tra di essi framezzar si possono; onde cogli spazj iperbolici, corrispondenti alle stesse porzioni, si avranno li logaritmi di tutti li numeri possibili, che sono maggiori dell'unità: dimodochè, siccome all'unità, additataci dalla CE, corrisponde per logaritmo il zero, o sia un spazio iperbolico privo di larghezza; così ad un numero maggiore dell' unità, additatoci da un'altra porzione CV, corrisponderà per logaritmo lo spazio iperbolico A E V S.

335. Conforme poi li numeri minori dell'unità, o siano li rotti, sono disegnati dalle porzioni dell' asintoto minori della C E; così logaritmi di essi saranno similmente gli spazj iperbolici, corrispondenti a quest' altre porzioni: dimodochè, se le porzioni C q, C u ci additino due rotti, li loro logaritmi saranno gl' altri spazj A E q p, A E u s, che terminansi alle due ordinate p q, s v, corrispondenti alle stesse porzioni. E poichè quest' altri spazj ritrovansi dall' altro lato della A E, perciò li medesimi per rapporto ai primi dovranno aversi, come spazj negativi; onde si è, che siano negativi parimente li logaritmi

mi iperbolici, che rapportansi ai numeri rotti.

336. Se la porzione Cu sia così picciola, che il rotto, da essa additatoci, sia infinitamente picciolo, ed in conseguenza poco, o niente differente dal zero; ancora il logaritmo iperbolico, che corrisponde ad una tal porzione, sarà al contrario infinitamente maggiore del quadrato dell' unità. In fatti dee ella avere per suo logaritmo lo spazio iperbolico infinitamente lungo, che rimane compreso tra l' ordinata AE, e l' altro asintoto CZ. Ma, se bene la larghezza di quest' altro spazio vadasi sempre più minorando, nientedimeno egli è facile il dimostrare, che il suo valore sia infinitamente grande per rapporto al quadrato della stessa AE. Si abbassi perciò sull' altro asintoto CZ l' ordinata CF, e siano MN, *Fig.* 65.
mn due altre ordinate infinitamente vicine dello stesso asintoto.

337. Se adunque tirinsi le due MO, mo parallele alla AE, e la seconda di esse mo incontrisi colla MN nel punto r; per la proprietà degl' asintoti sarà CN a Cn, come mn ad MN; ed in conseguenza dividendo CN, o sia MO sarà ad Nn, come mn ad Mr, o sia Oo. Quindi, facendosi eguali tra di loro li due piccioli quadrilateri MOom,

 MNnm,

M N *n m*, ed avendo luogo da per tutto la ſteſſa dimoſtrazione; ſarà lo ſpazio iperbolico, compreſo tra l'ordinata A E, e l' aſintoto C Z, eziandio eguale all' altro ſpazio iperbolico, che dopo la A F rimane compreſo tra l' iperbole, e lo ſteſſo aſintoto: ma queſta uguaglianza non può ſuſſiſtere, ſe ciaſcuno delli due ſpazj non ſia infinitamente grande per rapporto alla loro differenza C E A F, che è il quadrato della A E.

338. Or ſe bene li riferiti ſpazj iperbolici debbano averſi, come logaritmi delle porzioni dell' aſintoto, a cui corriſpondono; nientedimeno appartengono eſſi ad un ſiſtema, differente da quello, a cui rapportanſi li logaritmi, che abbiamo nel canone. Ed in fatti poſſono eſſere li logaritmi d' infiniti ſiſtemi diverſi; poichè, ſe bene la legge principale da oſſervarſi in eſſi, per facilitare maggiormente il calcolo, ſia, che l'unità abbia il zero per ſuo logaritmo; nientedimeno da queſta legge altro non ricavaſi, ſe non che debba incominciare la progreſſione aritmetica dal zero, e l' altra geometrica dall' unità. Onde, ſiccome ciò non baſta, per determinare le due progreſſioni, così a miſura, che variaſi, o una di eſſe, o ciaſcuna delle

due,

due, dee variare altresì il sistema delli logaritmi.

339. La stessa legge intanto comune a tutti li sistemi, cioè di essere il zero logaritmo dell' unità, fa, che li logaritmi di un sistema siano in data ragione colli logaritmi corrispondenti di ogn' altro sistema; onde, se mai sia noto il logaritmo iperbolico di un qualche numero, come del 2, niente sarà più facile, quanto di determinare il logaritmo iperbolico di qualsisia altro numero dato; potendosi egli dedurre dallo stesso canone logaritmico, che abbiamo, per mezzo della regola aurea; ed in fatti, se facciasi come il logaritmo vulgare del 2 al logaritmo vulgare dell' altro numero dato, così il logaritmo iperbolico dello stesso 2 ad un quarto proporzionale, si avrà con questo quarto proporzionale il logaritmo iperbolico dell' altro numero dato.

340. Se adunque sull' asintoto CX prendasi la porzione CV, che sia dupla della CE; sarà 2 il numero, che ella ci addita, ed in conseguenza col logaritmo iperbolico dello stesso 2 si avrà lo spazio AEVS, corrispondente alla porzione CV. Or con calcolo molto laborioso si è ritrovato, che il quadrato della CE sia allo spazio AEVS presso a poco, come 1 a 0'69314719. Onde volendosi, che

che la CE sia l' unità, conforme il suo quadrato dee essere ancora 1, così, tanto lo spazio AEVS, quanto il logaritmo iperbolico del numero 2 sarà 0'69314719; dal che ne segue, che nel sistema delli logaritmi iperbolici debba essere 2'30258509 il logaritmo di 10, 4'60517018 il logaritmo di 100, 6'90775527 il logaritmo di 1000, e così degl' altri.

341. Vedesi intanto, che il vero valore dello spazio AEVS sia il prodotto, che si ha, moltiplicando il quadrato della CE per lo logaritmo iperbolico della porzione CV, corrispondente a quello spazio: dimodochè il logaritmo iperbolico della CV dovrà aversi propriamente come l' esponente, o sia la quantità della ragione, che ritrovasi tra il quadrato della CE, e lo spazio AEVS. Onde, se sull' asintoto CX prendansi due porzioni, come CQ, CV, conforme li logaritmi iperbolici di queste due porzioni sono nella stessa ragione colli due spazj AEQP, AEVS, corrispondenti alle stesse porzioni, così ciascuno delli due logaritmi sarà alla loro differenza, come ciascuno delli due spazj allo spazio PQVS, che è la differenza tra li due AEQP, AEVS.

342. Del rimanente, per lo bisogno, che si ha delli logaritmi iperbolici nella

la conſtruzione di moltiſſimi problemi traſcendentali, ſi è ſtimato da Geometri profittevole, di diſegnarli con rette per mezzo di una curva, a cui ſi è dato perciò il nome di curva logaritmica. Siano perciò di nuovo C X, C Z li due aſintoti dell' iperbole equilatera M A P, e ſia ſimilmente A E l' ordinata, abbaſſata su 'l primo di eſſi dal vertice principale A. Diſtendaſi ciaſcuna dell' altre ordinate M N talmente per ſino al puuto O, che il rettangolo delle due C E, N O ſia eguale allo ſpazio A E N M, corriſpondente alla ſteſſa ordinata. E ſiccome le N O ſono nella medeſima ragione cogli ſpazj iperbolici, che ad eſſe corriſpondono, così le ſteſſe NO ſaranno eziandio logaritmi delle corriſpondenti porzioni C N; onde la curva, che paſſa per gli punti O, ſarà quella, che chiamaſi logaritmica.

343. Or non è da porſi in dubbio, che queſta curva debba paſſare per lo punto E; poichè, numerandoſi dalla A E gli ſpazj iperbolici, che ſi fanno proporzionali alle N O, e non corriſpondendo alla A E ſpazio veruno, la ſteſſa AE non ſi dovrà affatto diſtendere. Quantunque poi alle porzioni CQ, che ſono minori della C E, corriſpondano eziandio ſpazj iperbolici; nientedimeno queſt'

quest' altri spazj, come situati dall'altro lato della AE, debbono aversi come negativi per rapporto ai primi; e pertanto, in vece di distendere l' ordinate PQ, corrispondenti alle porzioni CQ, deesi più tosto da ciascuna di esse tagliare la porzione QO, che insieme colla CE contenga un rettangolo eguale al corrispondente spazio iperbolico AEPQ; onde la logaritmica dopo il punto E si porterà verso l' altro asintoto CZ, che sarà asintoto altresì della stessa logaritmica.

344. La maniera intanto di considerare la logaritmica si è, di rapportarla al suo asintoto CZ per mezzo delle perpendicolari OR, abbassate su di esso dalli suoi punti O, che perciò riguardansi come sue ordinate. E poichè, considerandola in questa guisa, si fanno le CR eguali alle NO, e le OR eguali alle CN; saranno perciò le porzioni CR del suo asintoto logaritmi dell' ordinate corrispondenti OR. A questa curva poi compete una proprietà molto singolare, e si è,
Fig. che se ad un punto di essa O tirisi la
67. tangente OT, che s' incontri col suo asintoto CZ nel punto T, la sottotangente RT sia sempre eguale alla CE; onde, attenta questa proprietà, se si abbia la sola logaritmica, si potrà determinare per mezzo della sua sottotan-

tangente, così l'iperbole equilatera, a cui ella si rapporta, come l' ordinata CE, che dee prendersi per unità.

345. Per dimostrare la riferita proprietà, pongasi, che le due *mo*, *or* siano parallele, ed infinitamente vicine all' altre due MO, OR, e che la prima di esse *mo* s' incontri colla OR nel punto *s*. Dovendo adunque essere, per l' indole della logaritmica, lo spazietto iperbolico MN*nm* eguale al rettangolo della CE nella *os*, differenza delle due NO, *no*, sarà CE ad MN, come N*n* o sia O*s* ad *so*. Ma, per l'iperbole, CE sta ad MN, come CN o sia OR a CE; e per essere equiangoli li due triangoli O*so*, ORT, O*s* sta ad *so*, come OR ad RT. Dunque, dovendo essere OR a CE, come la stessa OR ad RT, saranno eguali tra di loro le due CE, RT.

346. Da questa proprietà intanto ne seguono due altre ancora singolari. La prima si è, che lo spazio logaritmico, che dopo l' ordinata OR estendesi all' infinito insieme coll' asintoto RZ, sia eguale al rettangolo della sottotangente RT nella stessa ordinata OR. In fatti, essendo O*s* ad *so*, o sia R*r*, come OR ad RT; sarà il picciolo quadrilatero OR*ro* eguale al rettangolo della RT nella O*s*. Onde, avendo luo-

go

go da per tutto la ſteſſa dimoſtrazione, ed eſſendo la ſottotangente R T da per tutto della ſteſſa lunghezza, ſarà il riferito ſpazio infinitamente lungo eguale al rettangolo della ſottotangente R T nell' intera ordinata O R,

347. L' altra ſi è, che il ſolido, generato colla rivoluzione dello ſteſſo ſpazio intorno all' aſintoto RZ, ſia eguale al cilindro, che ha per baſe il cerchio deſcritto coll' ordinata O R, come raggio, e per altezza la ſottotangente RT. Intendanſi perciò deſcritti nella baſe del cilindro infiniti altri cerchi, li di cui raggi ſiano l' ordinate della logaritmica conſecutive alla OR; e ſiccome le circonferenze di queſti cerchi dividono la ſteſſa baſe in tante picciole corone, così il picciolo cilindro, generato colla rivoluzione del picciolo quadrilatero ORro intorno all' aſintoto R Z, ſarà eguale al prodotto della prima picciola corona nella ſottotangente R T; onde, avendo luogo da per tutto la ſteſſa uguaglianza, l' intero ſolido, e l' intero cilindro ſaranno eguali tra di loro.

348. Quantunque poi colla variazione dell' iperbole equilatera debba variare altresì la logaritmica; nientedimeno da una ſteſſa iperbole equilatera poſſono dedurſi tutte le logaritmiche poſſibili. Prendaſi perciò una retta ad arbi-

arbitrio, e distendasi ciascuna dell' ordinate MN talmente per sino al punto O, che il rettangolo della NO in quella retta sia eguale al corrispondente spazio iperbolico AENM. In questo caso pure le NO saranno nella stessa ragione cogli spazj, che ad esse corrispondono; ed in conseguenza tuttavia le stesse NO saranno logaritmi delle corrispondenti porzioni CN; ma la curva, che passa per gli punti O, sarà una logaritmica diversa dalla precedente, e la sua sottotangente sarà eguale alla stessa retta, che si è presa; onde, con prendere ora una retta, ed ora un' altra, si dedurranno dalla stessa iperbole equilatera tutte le logaritmiche possibili. *Fig. 66.*

349. Volendosi intanto, che non già la sottotangente della nuova logaritmica, ma la stessa CE sia l' unità, dovranno esprimersi con altri numeri li logaritmi, che con essa si hanno: come in fatti li logaritmi precedenti saranno con questi nuovi logaritmi nella stessa ragione, che ha la CE colla retta, che si è presa: dimodochè, se la CE sia dupla di questa retta, il nuovo logaritmo del numero 2 dovrà essere 0'34657359. Al contrario poi, se vogliasi la sottotangente della logaritmica, in cui il logaritmo del 2 sia un dato nu-

numero, dovrà farsi, come il logaritmo iperbolico del 2 al numero dato, così l' unità ad un quarto proporzionale, e con esso si avrà la sottotangente ricercata. Onde, secondo questa regola la sottotangente della logaritmica, corrispondente al canone, che abbiamo, sarà presso a poco 0'4343.

350. Or, affinchè s'incominci a vedere il bisogno, che si ha delli logaritmi iperbolici nella risoluzione di moltissimi problemi trascendentali, sia la
Fig. parabola AMV, che abbia per asse
68. la AB, e debbasi determinare la lunghezza dell' arco di essa AM. Pongasi, che MN, *mn* siano due ordinate infinitamente vicine dell'asse AB; e sulla tangente MT, che si ha col prolungamento dell' archetto M*m*, elevisi la perpendicolare MS, che s' incontri collo stesso asse nel punto S. Se adunque la picciola retta *mr* sia perpendicolare sulla MN, sarà il triangolo MNS equiangolo coll'altro picciolo *mr*M. Onde, essendo MS ad NS, come M*m* ad M*r*, sarà il rettangolo delle due NS, M*m* eguale al rettangolo dell' altre due MS, M*r*; la quale uguaglianza si ritroverà, ovunque nell' arco AM prendasi l' archetto M*m*.

351. Prolunghisi ora l'asse AB verso A talmente per fino al punto D, che

che la AD facciasi eguale alla metà del suo parametro, ed in conseguenza eguale alla NS; indi descrivasi l'iperbole equilatera D P*p*, che abbia per centro il punto A, e per vertice principale il punto D. Se adunque sulla A D si alzi la perpendicolare A Q, e per gli punti M, ed *m* tirisi le rette M P, *m p* parallele alla A D, che s' incontrino colla A Q ne' punti Q, e *q*, e coll' iperbole equilatera ne' punti P, e *p*; sarà la P Q eguale alla MS. Onde, facendosi il rettangolo delle due NS, M*m* eguale al picciolo quadrilatero P Q*q p*, sarà il rettangolo della NS, o sia AD nell' intero arco A M eguale allo spazio iperbolico ADPQ; e pertanto, con determinare il valore di questo spazio, e con dividerlo per la A D, si avrà la lunghezza dell'arco A M.

352. Per determinare intanto il valore dello spazio A D P Q, si ha bisogno di un logaritmo iperbolico, ed ecco come. Sia A X uno delli due asintoti dell' iperbole equilatera D P V, su di cui si abbassino l'ordinate DE, PO; e facendosi il settore DAP eguale allo spazio D E O P, compreso tra queste due ordinate, sarà l'intero spazio ADPQ eguale allo spazio D E O P insieme col triangolo A P Q. Onde, siccome lo spazio

ſpazio D E O P ſi ha, con moltiplicare il logaritmo iperbolico della A O per lo quadrato della AE; così, ſe a queſto prodotto aggiungaſi il triangolo APQ, o ſia la metà del rettangolo delle due A Q, P Q, ſi avrà l' intero ſpazio A D P Q. Conforme poi, con eſſere nota l'ordinata MN inſieme colla NS, ſono note le due A D, A Q; così per mezzo di eſſe ſi faranno note ancora l' altre due A E, P Q; e ſecondo ſarà dimoſtrato in luogo più proprio, A E ad AO ritrovaſi avere la ſteſſa ragione, che ha la A D alla ſomma delle due A Q, P Q.

§. XXIV.

Delli ſolidi, che generanſi colla rivoluzione delle ſteſſe curve.

353. ESaminati gli ſpazj, che racchiudono le tre curve colli loro aſſi, e colle loro ordinate; eſamineremo ora li ſolidi, che generanſi colla rivoluzione delle ſteſſe curve intorno ai loro aſſi. Sia perciò AM una delle tre curve, la quale abbia per aſſe la AB, e per parametro dello ſteſſo aſſe la A H. Diſtendaſi ciaſcuna delle ſue ordinate MN talmente per ſino al punto

Fig. 69.

to O, che il quadrato della ſteſſa MN ſia eguale al rettangolo delle due AH, N O. Si formerà adunque colle N O la nuova figura A N O; ed io dico, che il prodotto di queſta nuova figura per la A H ſia al ſolido, che generaſi colla rivoluzione della curva AM, o più toſto dello ſpazio A N M intorno all' aſſe A B, come ſta il diametro di un cerchio alla ſua circonferenza, ed in conſeguenza preſſo a poco, come 7 a 22.

354. In fatti, eſſendo il quadrato dell' ordinata M N al cerchio, che ha per raggio la ſteſſa MN, in queſta ragione; ancora il rettangolo delle due A H, N O ſarà al cerchio, che ha per raggio la M N, nella ſteſſa ragione. Ma poſto, che la *mno* ſia parallela, ed infinitamente vicina all' altra MNO, il prodotto del picciolo quadrilatero O N *no* per la A H ſta al picciolo cilindro, che generaſi colla rivoluzione dell' altro picciolo quadrilatero MN*nm* intorno all' aſſe A B, come il rettangolo delle due A H, N O al cerchio, che ha per raggio la M N. Dunque quel prodotto, e queſto picciolo cilindro ſimilmente ſaranno nella ſteſſa ragione; e per tanto, avendo queſta dimoſtrazione luogo da per tutto, ſarà il prodotto della figura A N O per la

AH

AH al ſolido, che generaſi colla rivoluzione dello ſpazio ANM intorno all'aſſe AB, come il diametro di un cerchio alla ſua circonferenza.

355. Attento queſto teorema generale, chiaro ſi è, che con determinare il prodotto della figura ANO per la AH, reſti determinato parimente il ſolido, che generaſi colla rivoluzione dello ſpazio ANM intorno all' aſſe AB. Pongaſi perciò primieramente, che la curva AM ſia la parabola; ed eſſendo il quadrato della MN eguale, così al rettangolo delle due AH, NO, come al rettangolo delle due AH, AN, ſarà la NO eguale alla AN; e per tanto la figura ANO ſarà un triangolo iſoſcele rettangolo, eguale alla metà del quadrato della AN. Onde, ſe moltiplichiſi il quadrato della AN per la AH, e facciaſi come il diametro di un cerchio alla ſua circonferenza, così la metà del prodotto, che ſi ha con quella moltiplicazione ad un quarto proporzionale, ſi avrà con eſſo il conoide parabolico, che generaſi colla rivoluzione dello ſpazio ANM intorno all' aſſe AB.

356. Eſſendo il rettangolo delle due AH, AN eguale al quadrato della MN, chiaro ſi è, che il prodotto del quadrato della AN per la AH ſia eguale

guale all'altro, che si ha, moltiplicando il quadrato della MN per la AN. E poichè quest'altro prodotto sta al cilindro circonscritto intorno al conoide parabolico, che generasi colla rivoluzione dello spazio ANM intorno all'asse AB, similmente come il diametro di un cerchio alla sua circonferenza; possiamo da ciò dedurne due conseguenze, di cui una si è, che il conoide parabolico sia la metà del cilindro circonscritto intorno ad esso; e l'altra, che il cono iscritto dentro del conoide contenga di esso li due terzi: dimodochè il cilindro, il conoide, ed il cono saranno tra di loro, come li numeri *6*, 3, 2.

357. Pongasi in secondo luogo, che la curva AMB sia l'ellisse; ed essendo il quadrato della MN eguale al rettangolo delle due AH, NO, sarà AH ad AB, come il rettangolo delle due AH, NO al rettangolo dell'altre due AN, BN, e per tanto il rettangolo dell'asse AB nella NO sarà eguale al rettangolo della AN nella BN. Quindi, se dal centro C elevisi sull'asse AB la perpendicolare CG, che sia eguale alla quarta parte dello stesso asse, e descrivasi una parabola, che abbia per asse la GC, e per parametro la AB; conforme questa parabo- *Fig.* 70.

rabola dovrà passare per gli punti A, e B, così dall' arco di essa AO sarà terminata la figura ANO. Onde, se determinisi questo spazio parabolico, e facciasi, come il diametro di un cerchio alla sua circonferenza, così il prodotto dello stesso spazio per la AH ad un quarto proporzionale, si avrà con esso la porzione dello sferoide ellittico, che generasi colla rivoluzione dello spazio ANM intorno all' asse AB.

358. Se poi vogliasi l' intero sferoide ellittico, chiaro si è, che debba moltiplicarsi per la AH l' intero spazio parabolico AGB; ed indi farsi, come il diametro di un cerchio alla sua circonferenza, così questo prodotto ad un quarto proporzionale. Onde, essendo l' intero spazio parabolico AGB eguale alla sesta parte del quadrato dell' asse AB, ed essendo inoltre il rettangolo delle due AH, AB eguale al quadruplo del quadrato della CD, che è la metà dell' altro asse dell' ellisse; si avrà quello stesso prodotto, con moltiplicare il quadrato della CD per gli due terzi dell' asse AB: dal che ne segue, che l' intero sferoide ellittico sia al cilindro circonscritto intorno allo stesso sferoide nella ragione di 2 a 3, come appunto sta la sfera al ci-

cilindro circonſcritto intorno alla ſteſſa sfera.

359. Or una tal determinazione dee aver luogo, tanto ſe A B ſia l' aſſe maggiore della mezza elliſſe A M B, quanto ſe ſia l'aſſe minore; e ciò per la ragione, che l'ordinate in ambidue gl' aſſi ritrovanſi avere la ſteſſa proprietà. Ma, ſiccome lo sferoide, che generaſi, con aggirarſi la mezza elliſſe intorno all' aſſe maggiore, è più lungo, che largo; così l' altro, che formaſi colla ſua rivoluzione intorno all' aſſe minore, ſarà al contrario più largo, che lungo. Se poi ſupponganſi eguali le due C A, C D, che ſono le metà delli due aſſi; in tal caſo la mezza elliſſe A M B ſi cambierà in mezzo cerchio, e ſi avrà in conſeguenza la sfera colla ſua rivoluzione intorno all' aſſe A B; ed eſſendo tuttavia parabola la curva, da cui è terminata la figura AGB, la ſteſſa determinazione avrà luogo ancora nella sfera.

360. Pongaſi finalmente, che la curva A M ſia l' iperbole; ed eſſendo il quadrato della M N eguale al rettangolo delle due A H, N O, ſarà A H ad A B, come il rettangolo delle due A H, N O al rettangolo dell'altre due A N, B N; ed in conſeguenza ancora nell' iperbole il rettangolo dell'aſſe AB *Fig. 71.*

nella NO sarà eguale al rettangolo della AN nella BN. Quindi, se dal centro C elevisi sull' asse AB la perpendicolare CG, che sia eguale alla quarta parte dello stesso asse, e descrivasi una parabola, che abbia per asse la GC, e per parametro la AB, ancora questa parabola dovrà passare per gli punti A, e B; e se la medesima distendasi più oltre verso A, similmente dall' arco di essa AO sarà terminata la figura ANO. Onde, se determinisi questo spazio parabolico, e facciasi, come il diametro di un cerchio alla sua circonferenza, così il prodotto dello stesso spazio per la AH ad un quarto proporzionale; si avrà con esso il conoide iperbolico, che generasi colla rivoluzione dello spazio ANM intorno all' asse AB.

361. Specialmente poi, se pongasi la AN eguale alla CA, sarà lo spazio parabolico ANO eguale ai due terzi del suo quadrato; onde il prodotto dello stesso spazio per la AH sarà eguale ai due terzi del prodotto del quadrato della CA per la AH. E poichè nella stessa supposizione, di essere la AN eguale alla CA, si fa il rettangolo delle due AH, CA eguale ai due terzi, così del rettangolo delle due AH, NO, come del quadrato della

MN;

MN; perciò lo ſteſſo prodotto ſarà eguale alle quattro none parti di quello, che ſi ha, moltiplicando il quadrato della MN per la CA; dal che ne ſegue, che eſſendo la AN eguale alla CA, il conoide iperbolico, che generaſi colla rivoluzione dello ſpazio ANM intorno all' aſſe AB, ſia al cilindro circonſcritto intorno allo ſteſſo conoide ſimilmente, come 4 a 9.

362. Se AB ſia l' aſſe conjugato dell' iperbole, ed eſſendo MN una delle ſue ordinate, e D*d* l' aſſe principale, ſi aggiri lo ſpazio CDMN intorno allo ſteſſo aſſe AB; in tal caſo il ſolido, che generaſi, ſarà terminato eſteriormente da una ſuperficie concava, ed il rettangolo della AB nella NO ſi farà eguale alla ſomma delli quadrati delle due CA, CN. Ma da queſta uguaglianza ancora ricavaſi, che la figura CGON, formata colle NO, ſia terminata da un' arco di parabol'. In fatti, facendoſi la CG eguale alla quarta parte dell' aſſe AB, ſarà il rettangolo delle due AB, CG eguale al quadrato della CA; onde, abbaſſandoſi ſulla CG, prolungata verſo K, la perpendicolare OR, ſarà il rettangolo delle due AB, GR eguale al quadrato della MN, o ſia OR; e pertanto la OR ſarà ordinata della parabola, *Fig. 72.*

 che

che ha per asse la G K, e per parametro la A B.

363. Se adunque determinisi lo spazio C G O N, terminato dall'arco G O della riferita parabola, e facciasi come il diametro di un cerchio alla sua circonferenza, così il prodotto dello stesso spazio per lo parametro A H ad un quarto proporzionale; si avrà con esso il solido, che generasi colla rivoluzione dello spazio iperbolico C D M N intorno all' asse conjugato A B. Conforme poi, tirata la G I parallela alla CA, che s'incontri colla NO nel punto I, si fa lo spazio parabolico esteriore GIO eguale alla terza parte del rettangolo delle due G I, O I; così, se dalla O I taglisi la I L, che sia eguale alla sua terza parte, si avrà col rettangolo delle due CN, NL l'intero spazio CGON, di cui si ha bisogno, per determinare quest' altro solido iperbolico.

364. Specialmente poi, se pongasi la C N eguale alla C A, sarà il quadrato dell'ordinata corrispondente M N eguale, così al rettangolo delle due A H, C A, come al rettangolo delle due AH, NO; onde facendosi la NO ancora eguale alla C A, sarà la N L eguale ai due terzi della stessa CA, ed in conseguenza lo spazio CGON si farà eguale ai due terzi del quadrato della

la C A. Quindi il prodotto dello ſteſſo ſpazio per la AH ſarà eguale ai due terzi, così del prodotto del quadrato della C A per la A H, come del prodotto del quadrato della M N per la C A; dal che ne ſegue, che eſſendo la C N eguale alla C A, il ſolido, che ſi genera colla rivoluzione dello ſpazio iperbolico C D M N intorno all' aſſe conjugato A B, ſia al cilindro, circonſcritto intorno allo ſteſſo ſolido, come 2 a 3.

365. Del rimanente, ſe bene nell'iperbole equilatera ſia d' infinito valore lo ſpazio infinitamente lungo, che dopo una dell' ordinate di un ſuo aſintoto rimane compreſo tra l' iperbole, e lo ſteſſo aſintoto; nientedimeno il ſolido, che generaſi colla rivoluzione dello ſteſſo ſpazio intorno allo ſteſſo aſintoto, ſarà al contrario di valore finito. Ponghaſi perciò, che dell' iperbole equilatera A M V ſia A il vertice principale, C il centro, e C X uno de' ſuoi aſintoti. Si abbaſſino su di queſto aſintoto l' ordinate A E, M N; ed io dico, che il ſolido, che generaſi colla rivoluzione dello ſpazio infinitamente lungo XNMV intorno all' aſintoto C X, ſia eguale al cilindro, che ha per baſe il cerchio, deſcritto col raggio della A E, e per altezza la M N. *Fig.* 73.

366. Per dimostrarlo, tirisi al punto M la tangente MT, che s'incontri coll' asintoto CX nel punto T, e pongasi, che la *mn* sia un' altra ordinata infinitamente vicina alla prima MN, e che la picciola retta *mr* sia perpendicolare sulla stessa MN. Essendo adunque il rettangolo delle due MN, NT eguale al quadrato della AE, li cerchi descritti colli raggi delle due MN, AE saranno tra di loro, come MN ad NT. Ma, per essere il triangolo MNT equiangolo coll' altro picciolo M*rm*, MN sta ad NT, come M*r* ad *rm*, o sia N*n*. Dunque ancora li due cerchi saranno tra di loro, come M*r* ad N*n*; e per tanto il prodotto del primo cerchio per la N*n* sarà eguale al prodotto dell' altro cerchio per la M*r*.

367. Quindi, siccome il picciolo cilindro, che generasi colla rivoluzione del picciolo quadrilatero MN*nm* intorno all'asintoto CX, si ha, con moltiplicare per la N*n* il cerchio, che ha per raggio la MN; così lo stesso picciolo cilindro si avrà altresì, con moltiplicare per la M*r* il cerchio, che ha per raggio la AE. Onde, essendo la M*r* eguale alla differenza delle due ordinate MN, *mn*, ed avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, dobbiam

biam conchiudere, che ſi abbia il ſolido, che generaſi colla rivoluzione dello ſpazio infinitamente lungo XNMV intorno all'aſintoto CX, con moltiplicare il cerchio, deſcritto col raggio della AE, per tutta la MN; ed in conſeguenza, che lo ſteſſo ſolido ſia eguale al cilindro, che ha per baſe il riferito cerchio, e per altezza la MN.

368. Per la ſteſſa ragione, ſe CZ ſia l'altro aſintoto dell' iperbole, e su di eſſo ſi abbaſſi l'ordinata CF; il ſolido, che generaſi colla rivoluzione dello ſpazio infinitamente lungo XEAV intorno all'aſintoto CX, ſarà eguale al cilindro, che ſi deſcrive colla rivoluzione del quadrato AFCE intorno allo ſteſſo aſintoto; onde li due ſolidi ſaranno tra di loro, come MN ad AE. Ma, ſe poi intorno all'aſintoto CX ſi aggiri l'intero ſpazio, compreſo tra l' iperbole, e li due aſintoti; in tal caſo ſarà infinito il valore del ſolido, che ſi genera, per la ragione, che ſiccome l'ordinata, a cui terminaſi lo ſpazio, che ſi aggira, è l'aſintoto CZ, così il ſolido, che ſi genera, dovrà eſſere eguale ad un cilindro, che ha per baſe il cerchio deſcritto col raggio della AE, e per altezza lo ſteſſo aſintoto CZ.

§. XXV.

Delle ſuperficie curve, che terminano gli ſteſſi ſolidi.

369. PEr quanto alle ſuperficie curve, da cui ſono terminati gli ſteſſi ſolidi, queſte ancora potranno determinarſi per mezzo di un teorema generale, ed ecco come. Sia di nuovo AM una delle tre curve, ed abbaſſata ſull' aſſe di eſſa AB l'ordinata MN, ſia MS perpendicolare ſulla retta, che è tangente della curva nel punto M, la quale MS s' incontri coll' aſſe AB nel punto S. Diſtendaſi la MN talmente per ſino al punto O, che ſia la NO eguale alla MS; e ſe facciaſi lo ſteſſo coll' altre ordinate dell' aſſe AB, ſi avrà la nuova figura ANOE. Or io dico, che queſta figura ſia alla ſuperficie curva del ſolido, che generaſi colla rivoluzione dello ſpazio ANM intorno all' aſſe AB, come ſta il raggio di un cerchio alla ſua circonferenza, ed in conſeguenza preſſo a poco come 7 a 28.

Fig. 74.

370. Per dimoſtrarlo, pongaſi, che la *mno* ſia parallela, ed infinitamente vicina alla MNO, e che la picciola retta *mr* ſia perpendicolare ſulla MN. Eſſen-

Essendo adunque il triangolo MNS equiangolo coll' altro picciolo *mr*M, sarà MS, ovvero NO ad MN, come M*m* ad *mr*, o sia N*n*; ed in conseguenza il picciolo quadrilatero ON*no* sarà eguale al picciolo rettangolo della MN nell' archetto M*m*. Ma questo picciolo rettangolo sta alla picciola corona conica, che descrivesi dall' archetto M*m* colla sua rivoluzione intorno all'asse AB, come sta il raggio di qualsisia cerchio alla sua circonferenza. Dunque in questa stessa ragione sarà altresì il picciolo quadrilatero ON*no* alla stessa picciola corona conica; e per tanto, avendo questa dimostrazione luogo da per tutto, sarà la figura ANOE alla superficie curva del solido, di cui si tratta, similmente, come il raggio di un cerchio alla sua circonferenza.

371. Attento quest' altro teorema generale, chiaro si è, che con determinare la figura ANOE, resti determinata parimente la superficie curva del solido, che generasi colla rivoluzione dello spazio ANM intorno all' asse AB. Pongasi perciò primieramente, che la curva AM sia la parabola, e che il parametro del suo asse AB sia la AH. Prolunghisi l'asse AB verso A talmente per fino al punto G, che facciasi la AG eguale alla quarta parte

del parametro AH; ed essendo la NS eguale alla metà dello stesso parametro, sarà il suo quadrato eguale al rettangolo delle due AH, AG. Ma il quadrato della MN è eguale al rettangolo delle due AH, AN. Dunque il quadrato della MS, o sia NO, come eguale ai quadrati delle due MN, NS, sarà eguale al rettangolo delle due AH, GN.

372. Quindi, se descrivasi un' altra parabola, che abbia per asse la GN, e per parametro la stessa AH; da un' arco di essa EO sarà terminata la figura ANOE, ed in conseguenza sarà la AE eguale alla metà del parametro AH. Onde, se determinisi lo spazio parabolico ANOE, e facciasi, come il raggio di un cerchio alla sua circonferenza, così il riferito spazio parabolico ad un quarto proporzionale, si avrà con esso la superficie curva del conoide parabolico, che generasi colla rivoluzione dello spazio ANM intorno all' asse AB. Vedesi intanto, che possa determinarsi la superficie curva del conoide parabolico per mezzo di un spazio della stessa parabola AM: come in fatti, se facciasi la AK eguale alla AG, e dividasi la NS per metà nel punto Q, sarà lo spazio ANOE eguale all' altro FKQP, racchiuso nella parabola

AM

AM tra le due ordinate FK, PQ.

373. Pongasi in appresso, che la curva AMB sia l'ellisse, in cui AB sia l'asse maggiore, AH il suo parametro, F, *f* li due fochi, e CD la metà dell' altro asse minore. Tirisi al punto M la tangente IL, che s'incontri ne' punti I, ed L colle due AI, BL parallele alla MN; ed essendo eguale alla quarta parte della figura del diametro, che ha per vertice il punto M, così il rettangolo delle due MI, ML, come il rettangolo delle due MF, M*f*, saranno eguali tra di loro questi due rettangoli. Ma il quadrato della MS, o sia NO sta al rettangolo delle due MI, ML, come AH ad AB, o pure come il quadrato della CD al quadrato della CA. Dunque nella ragione di questi due quadrati sarà ancora il quadrato della NO al rettangolo delle due MF, M*f*. *Fig.* 75.

374. Prolunghisi in appresso la CA talmente per fino al punto G, che CA sia a CG, come CF a CA; ed essendo in questa ragione di CF a CA, così MF alla differenza delle due CG, CN, come M*f* alla somma delle stesse due CG, CN, sarà il rettangolo delle due MF, M*f* alla differenza tra li quadrati delle due CG, CN, come il quadrato della CF al quadrato della

 CA,

CA, o pure come il quadrato della CA al quadrato della CG; e per tanto ordinando il quadrato della NO sarà alla differenza tra li quadrati delle due CG, CN, come il quadrato della CD al quadrato della CG; onde, se descrivasi un' altra ellisse, di cui CG sia la metà dell' asse maggiore, e la stessa CD, o sia C*d* la metà dell' altro minore, sarà terminata la figura ANOE da un' arco di quest' altra ellisse.

375. Determinisi adunque lo spazio ellittico ANOE, e se facciasi, come il raggio di un cerchio alla sua circonferenza, così il riferito spazio ad un quarto proporzionale; si avrà con esso la superficie curva della porzione dello sferoide ellittico, che generasi colla rivoluzione dello spazio ANM intorno all' asse AB. Ed è da notarsi, che in quest' altra ellisse la AE si fa eguale alla metà della AH, che è il parametro dell' asse AB della prima ellisse. In fatti, essendo le tre CG, CA, CF continuamente proporzionali, sarà il quadrato della CG alla differenza tra li quadrati delle due CG, CA, come il quadrato della CA al quadrato della CD. Ma il quadrato della CG sta alla differenza tra li quadrati delle due CG, CA, come il quadrato della

C*d*,

C d, o sia C D al quadrato della A E. Dunque, facendosi continuamente proporzionali le tre C A, C D, A E, sarà la A E eguale alla metà del parametro A H.

376. Se l'asse AB suppongasi essere di una lunghezza infinita, si cambierà in parabola, così l'ellisse A M B, come l'altra G O d, e ciascuna delle due A F, A G si farà eguale alla quarta parte del parametro AH; onde di nuovo si vede, che sia parabolico lo spazio A N O E, per mezzo di cui determinasi la superficie curva del conoide parabolico, che generasi colla rivoluzione dello spazio A N M intorno all' asse A B. Se poi suppongasi, che li due assi A B, D d siano tra di loro eguali, conforme l'ellisse A M B cambiasi in circonferenza di cerchio, così la figura A N O E sarà un rettangolo, fatto dalle due C A, A N; e da ciò egli è facile il ricavarne, che la superficie sferica, descritta colla rivoluzione dell' arco circolare AM intorno al diametro A B, si abbia, con moltiplicare la circonferenza del cerchio massimo per la A N, ed in conseguenza, che la superficie della sfera sia quadrupla dello stesso cerchio.

377. Se dell' ellisse A M B sia al contrario A B l'asse minore, e D d l'altro *Fig.* 76.

altro maggiore ; in tal caso , posto di nuovo , che il punto F sia uno delli due fochi, faccian si continuamente proporzionali, così le tre CF, CA, CG, come le altre tre CF, CD, CK. E siccome da ciò ne segue, che li quadrati delle due CA, CD siano, come CG a CK; così può dimostrarsi ancora, che gli stessi quadrati siano, come li quadrati delle due CG, CA al quadrato della CK. In fatti, essendo continuamente proporzionali le tre CG, CA, CF, saranno li quadrati delle due CG, CA al quadrato della CA, come il quadrato della CD al quadrato della CF. Ma questi due quadrati sono nella stessa ragione colli quadrati delle due CK, CD, per essere continuamente proporzionali ancora le tre CK, CD, CF. Dunque li quadrati delle due CG, CA saranno al quadrato della CK, come il quadrato della CA al quadrato della CD.

378. Or, se la MS s'incontri colla CD nel punto Q, sarà MS ad MQ, come NS a CN; e pertanto, poichè abbassata sull'asse D*d* l'ordinata MR, NS sta a CN, come CR ad RQ, o pure come il quadrato della CD al quadrato della CA, o finalmente come CK a CG, saranno li quadrati delle due MS, MQ nella stessa ragio-

ne

ne colli quadrati dell' altre due CK, CG. Ma è ſtato poc' anzi dimoſtrato, che il quadrato della MQ ſia alla differenza tra li quadrati delle due CK, MN, come il quadrato della CA al quadrato della CK. Dunque perturbando ſarà il quadrato della MS, o ſia NO alla differenza tra li quadrati delle due CK, MN, come il quadrato della CA al quadrato della CG.

379. Conforme poi il quadrato della MN ſta alla differenza tra li quadrati delle due CA, CN, come il quadrato della CD al quadrato della CA, o pure come il quadrato della CK ai quadrati delle due CG, CA; così, ſe li termini della prima ragione ſatolganſi dalli termini della ſeconda, ſarà la differenza tra li quadrati delle due CK, MN alla ſomma delli quadrati dell' altre due CG, CN ſimilmente, come il quadrato della CD al quadrato della CA. Onde di nuovo perturbando il quadrato della NO ſarà alla ſomma delli quadrati delle due CG, CN, come il quadrato della CD al quadrato della CG; e pertanto, ſe deſcrivaſi un' iperbole, di cui CD, o C*d* ſia la metà dell' aſſe proprio, e CG la metà dell' altro conjugato, ſarà terminata la figura ANOE da un' arco di queſta iperbole.

380. Determinisi adunque lo spazio iperbolico ANOE, e se facciasi, come il raggio di un cerchio alla sua circonferenza, così il riferito spazio ad un quarto proporzionale, si avrà con esso la superficie curva della porzione dello sferoide ellittico, che generasi colla rivoluzione dello spazio AMN intorno all'asse minore AB. E quì ancora è da notarsi, che nella descritta iperbole la AE si fa eguale alla metà della AH, che nell' ellisse è il parametro dell'asse AB. In fatti, essendo continuamente proporzionali le tre CG, CA, CF, sarà il quadrato della CG, ai quadrati delle due CG, CA, come il quadrato della CA al quadrato della CD. Ma il quadrato della CG sta ai quadrati delle due CG, CA, come il quadrato della C*d*, o sia CD al quadrato della AE. Dunque, facendosi continuamente proporzionali le tre CA, CD, AE, sarà la AE eguale alla metà del parametro AH.

Fig. 77. 381. Pongasi finalmente, che la curva AM sia un' iperbole, di cui AB sia l'asse proprio, AH il suo parametro, F, *f* li due fochi, e D*d* l' altro asse conjugato. Tirisi al punto M la tangente MI, che s' incontri ne' punti I, ed L colle due AI, BL parallele alla MN; ed essendo eguali alla quarta della

della figura del diametro, che ha per vertice il punto M, così il rettangolo delle due M I, M L, come il rettangolo delle due M F, M*f*, saranno eguali tra di loro questi due rettangoli. Ma il quadrato della M S, o sia N O sta al rettangolo delle due M I, M L, come A H ad A B, o pure come il quadrato della C D al quadrato della C A. Dunque nella ragione di questi due quadrati sarà ancora il quadrato della NO al rettangolo delle due MF, M*f*.

382. Taglisi in appresso dalla C A la porzione C G di lunghezza tale, che C A sia a C G, come C F a C A; ed essendo in questa ragione di C F a C A, così M F alla differenza delle due C N, C G, come M*f* alla somma delle due C N, C G; sarà il rettangolo delle due M F, M*f* alla differenza tra li quadrati delle due C N, C G, come il quadrato della C F al quadrato della C A, o pure come il quadrato della C A al quadrato della C G; e pertanto ordinando il quadrato della N O sarà alla differenza tra li quadrati delle due C N, C G, come il quadrato della C D al quadrato della C G; onde, se descrivasi un'altra iperbole, di cui C G sia la metà dell' asse proprio, e la stessa C D, ovvero C *d*

C *d* la metà dell' altro asse conjugato, sarà terminata la figura ANOE da un' arco di quest' altra iperbole.

383. Determinisi adunque lo spazio iperbolico ANOE, e se facciasi, come il raggio di un cerchio alla sua circonferenza, così il riferito spazio ad un quarto proporzionale; si avrà con esso la superficie curva del conoide iperbolico, che generasi colla rivoluzione dello spazio ANM intorno all'asse AB. Ed è da notarsi, che in quest' altra iperbole la AE si fa eguale alla metà della AH, che è il parametro dell'asse AB della prima iperbole. In fatti, essendo le tre CG, CA, CF continuamente proporzionali, sarà il quadrato della CG alla differenza tra li quadrati delle due CA, CG, come il quadrato della CA al quadrato della CD. Ma il quadrato della CG sta alla differenza tra li quadrati delle due CA, CG, come il quadrato della CD al quadrato della AE. Dunque, facendosi continuamente proporzionali le tre CA, CD, AE, sarà la AE eguale alla metà del parametro AH.

Fig. 78. 384. Se dell' iperbole sia al contrario AB l' asse conjugato, e D *d* l' altro principale; in tal caso, posto di nuovo, che il punto F sia uno delli due fochi, faccianſi continuamente propor-

zio-

zionali, così le tre CF, CA, CG, come le altre tre CF, CD, CK. E ſiccome da ciò ne ſegue, che li quadrati delle due CA, CD ſiano, come CG a CK; così può dimoſtrarſi ancora, che gli ſteſſi quadrati ſiano, come la differenza tra li quadrati delle due CG, CA al quadrato della CK. Imperocchè, eſſendo continuamente proporzionali le tre CG, CA, CF, ſarà la differenza tra li quadrati delle due CG, CA al quadrato della CA, come il quadrato della CD al quadrato della CF. Ma queſti due quadrati ſono nella ſteſſa ragione colli quadrati delle due CK. CD, per eſſere ancora le tre CK, CD, CF continuamente proporzionali. Dunque la differenza tra li quadrati delle due CG, CA ſarà al quadrato della CK, come il quadrato della CA al quadrato della CD.

385. Or ſe la MS s' incontri colla CD nel punto Q, ſarà MS ad MQ, come NS a CN; e per tanto, poichè abbaſſata ſull' aſſe D*d* l' ordinata MR NS ſta a CN, come CR ad RQ, o pure come il quadrato della CD al quadrato della CA, o finalmente come CK a CG, ſaranno li quadrati delle due MS, MQ nella ſteſſa ragione colli quadrati dell' altre due CK, CG. Ma è ſtato poc' anzi dimoſtrato, che

che il quadrato della MQ sia alla differenza tra li quadrati delle due CK, MN, come il quadrato della CA al quadrato della CK. Dunque perturbando sarà il quadrato della MS, o sia NO alla differenza tra li quadrati delle due CK, MN, come il quadrato della CA al quadrato della CG.

386. Conforme poi il quadrato della MN sta alla somma delli quadrati delle due CA, CN, come il quadrato della CD al quadrato della CA, o pure come il quadrato della CK alla differenza tra li quadrati delle due CG, CA; così, se li termini della seconda ragione tolgansi dalli termini della prima, sarà la differenza tra li quadrati delle due CK, MN alla somma delli quadrati dell' altre due CN, CG similmente, come il quadrato della CD al quadrato della CA. Onde di nuovo perturbando il quadrato della NO sarà alla somma delli quadrati delle due CN, CG, come il quadrato della CD al quadrato della CG; e pertanto, se descrivasi un' altra iperbole, di cui CD, o C*d* sia la metà dell' asse proprio, e CG la metà dell' altro conjugato, sarà terminata la figura *d*CNO da un' arco di questa iperbole.

387. Determinisi adunque lo spazio iper-

iperbolico *d*CNO, e se facciasi, come il raggio di un cerchio alla sua circonferenza, così il riferito spazio ad un quarto proporzionale; si avrà con esso la superficie curva del solido, che generasi colla rivoluzione dello spazio iperbolico CDMN intorno all'asse conjugato AB. E quì ancora si vuol notare, che se nella conjugata di quest' altra iperbole tirisi la AE parallela alla C*d*, si farà ella eguale alla metà della AH, che nella prima iperbole è il parametro del suo asse conjugato AB. In fatti, essendo le tre CG, CA, CF continuamente proporzionali, sarà il quadrato della CG alla differenza tra li quadrati delle due CA, CG, come il quadrato della CA al quadrato della CD. Ma il quadrato della CG sta alla differenza tra li quadrati delle due CA, CG, come il quadrato della CD al quadrato della AE. Dunque, facendosi continuamente proporzionali le tre CA, CD, AE, sarà la AE eguale alla metà del parametro AH.

388. Per conchiudere adunque, conforme coll' ellisse possono formarsi due solidi, uno con aggirarla intorno all'asse maggiore, e l' altro con aggirarla intorno all' asse minore; così eziandio coll'iperbole possono formarsi due solidi, uno colla sua rivoluzione intorno all'asse

ſe proprio, e l'altro colla ſua rivoluzione intorno all'aſſe conjugato. Ma, ſe bene debbaſi determinare per mezzo d'archi circolari la ſuperficie curva del primo ſolido ellittico, e per mezzo di logaritmi iperbolici la ſuperficie curva dell'altro; nientedimeno, per quanto ſi appartiene alle ſuperficie curve delli due ſolidi iperbolici, ſi ha biſogno di logaritmi iperbolici, per la determinazione, così dell'una, come dell'altra.

§. XXVI.

Dell' unghiette centrali, tagliate da un cilindro ellittico.

389. SIccome niente vieta, di formare ſull'elliſſe un cilindro a ſimiglianza di quello, che formaſi ſul cerchio; così, ſe queſto cilindro ſia retto, ed il medeſimo ſi ſeghi per un piano, che ſi termini ad uno delli due aſſi dell'elliſſe; ſi avrà colla porzione dello ſteſſo cilindro, che rimane compreſa tra la ſua baſe, ed il piano ſecante, un'unghietta ellittica centrale. Le metà di queſte unghiette ſogliono impiegarſi tal volta dagl'Artefici nella ſtruttura delle volte, con cui cuopronſi le ſtanze nobili degl'edificj; onde faremo ora vedere, come debbaſi determinare, e porre a calcolo, così la loro ſoli-

ſolidità, come la loro ſuperficie curva.

390. Sia perciò la mezza elliſſe AMB, *Fig.*
di cui AB ſia uno delli due aſſi, AH *79.*
il ſuo parametro, e CD la metà dell' altro aſſe conjugato; e ſia ancora ABDK l' unghietta riſecata dal cilindro ellittico per mezzo del piano AKB, che terminaſi all' aſſe AB. Eleviſi ſulla CD il piano CDK, che ſia perpendicolare al piano della mezza elliſſe AMB, e ſi termini all' altro piano AKB. Prenderà egli dunque dentro dell' unghietta forma di triangolo, e dividerà in due parti eguali la ſteſſa unghietta; onde, attenta la ſituazione, che ſi da alle due mezze unghiette CDKA, CDKB nella ſtruttura delle volte, conforme il triangolo CDK dee riguardarſi, come baſe di ciaſcuna di eſſe, così ſarà CA l' altezza della prima CDKA, e CB l' altezza dell' altra CDKB.

491. Or, ſe ciaſcuna dell' ordinate MN diſtendaſi talmente per ſino al punto O, che il quadrato della ſteſſa MN facciaſi eguale al rettangolo delle due AH, NO; ſi avrà colla NO una nuova figura, che ſecondo è ſtato dimoſtrato, ſarà terminata dalla parabola AGB, che ha per aſſe la GC, eguale alla quarta parte della AB, e per parametro la ſteſſa AB. Determini-

niſi

nisi adunque lo spazio parabolico ACG, ed io dico, che il prodotto dello stesso spazio per la AH sia alla mezza unghietta CDKA, come il quadrato della CD al triangolo CDK, o pure come CD alla metà dell' altra DK. Per dimostrarlo, pongasi, che le due MNO, *mno* siano parallele, ed infinitamente vicine tra di loro; e tirate nella superficie curva della mezza unghietta le rette MR, *mr* parallele alla DK, congiunganfi le due NR, *nr*.

392. Conforme adunque con queste rette formansi dentro della mezza unghietta gli altri due triangoli NMR, *nmr* equiangoli col triangolo CDK; così il picciolo prisma, compreso tra quest' altri due triangoli, potrà riguardarsi, come elemento della stessa mezza unghietta. Ma, per essere il rettangolo delle due AH, NO eguale al quadrato della MN, il prodotto del picciolo quadrilatero ON*no* per la AH sta a quel picciolo prisma, come il quadrato della MN al triangolo NMO, o pure come il quadrato della CD al triangolo CDK. Dunque, avendo questa stessa analogia luogo da per tutto, sarà il prodotto dell' intero spazio parabolico ACG per la AH all' intera mezza unghietta CDKA similmente, come il quadrato della CD al triangolo

lo C D K, o pure come C D alla metà dell' altra D K.

393. Poichè dunque lo ſpazio parabolico A C G è eguale ai due terzi del rettangolo delle due C A, C G; ſarà il prodotto dello ſteſſo ſpazio per la A H eguale ai due terzi del prodotto delle tre C A, C G, A H, o pure ai due terzi del prodotto del quadrato della C D per la C A. Onde, dovendo eſſere queſto prodotto alla mezza unghietta C D K A, come il quadrato della C D al triangolo C D K; ſi avrà la ſolidità della mezza unghietta, con moltiplicare il triangolo C D K, che ſerve ad eſſa di baſe, per gli due terzi della ſua altezza C A. E ſiccome da ciò ne ſegue, che la ſteſſa mezza unghietta ſia al priſma, circonſcritto intorno ad eſſa, come 2 a 3; così, ſe con quadranti ellittici forminſi ſulle figure piane regolari poliedri cilindrici, conſimili a quelli, formati nella Geometria ſolida con quadranti circolari, pure ciaſcuno di eſſi ſarà al priſma, circonſcritto intorno allo ſteſſo poliedro, come 2 a 3.

394. Per quanto poi alla ſuperficie curva della mezza unghietta C D K A, ella non può averſi con eſattezza, ma ſoltanto per via di approſſimazione. *Fig.* Diſtendaſi perciò ciaſcuna dell' ordinate 80.

MN talmente per fino al punto O, che la NO facciasi eguale alla MS, alzata perpendicolarmente sulla retta, che è tangente del quadrante ellittico nel punto M; ed io dico, che la nuova figura ACdE, formata colle NO, sia alla superficie curva della mezza unghietta CDKA, come CD a DK. Per dimostrarlo, pongasi similmente, che le due MNO, *mno* siano parallele, ed infinitamente vicine tra di loro; e tirate di nuovo nella superficie curva della mezza unghietta le rette MR, *mr* parallele alla DK, si abbassi sulla MN la perpendicolare *ms*.

395. Essendo adunque equiangoli li due triangoli MNS, M*sm*, sarà MS, o sia NO ad MN, come M*m* ad *ms*, ovvero N*n*; e pertanto il picciolo quadrilatero ON*no* sarà eguale al rettangolo della MN nell'archetto M*m*. Ma questo rettangolo sta all'altro picciolo quadrilatero RM*mr*, come MN ad MR, o pure come CD a DK. Dunque ancora quel picciolo quadrilatero ON*no* sarà a quest' altro RM*mr*, come CD a DK; ed in conseguenza, avendo questa stessa analogia luogo da per tutto, sarà l' intera figura AE*d*C all' intera superficie curva della mezza unghietta CDKA similmente, come CD a CK.

396.

396. Pongasi ora primieramente, che nel quadrante ellittico CAD sia CA la metà dell'asse maggiore, e CD la metà dell'altro minore. Se adunque il punto F sia il foco dello stesso quadrante, e distendasi la CA talmente per fino al punto G, che CF sia a CA, come CA a CG; secondo è stato già dimostrato, sarà terminata la figura AE*d*C dall'arco E*d* dell'altro quadrante ellittico CG*d*, di cui CG è la metà dell'asse maggiore, e la stessa CD, o sia C*d* la metà dell'altro minore; e sarà altresì la AE eguale alla metà del parametro AH. Onde, se determinisi lo spazio ellittico AE*d*C, e facciasi, come CD a CK, così lo stesso spazio ad un quarto proporzionale; si avrà con esso la superficie curva della mezza unghietta CDKA.

397. Se poi col centro C, e coll' intervallo della CG descrivasi il quadrante circolare GIL, che s'incontri colla AE nel punto I, e colla C*d* nel punto L; sarà nella ragione di CG a CD, tanto AI ad AE, quanto lo spazio circolare AILC allo spazio ellittico AE*d*C. Onde, se facciasi, come CG a DK, così lo spazio circolare AILC ad un quarto proporzionale; ancora con esso si avrà la superficie curva della mezza unghietta. Ed

essendo così, egli è facile il dimostrare, che si abbia la stessa superficie, primieramente con aggiungere la CD all'arco IL, ed indi con moltiplicare la loro somma per la metà della DK.

398. In fatti, essendo la AE eguale alla metà del parametro AH, sarà CA a CD, come CD ad AE. Ma CD sta a CG, come AE ad AI. Dunque ordinando sarà CA a CG, come CD ad AI; e per tanto il rettangolo delle due CA, AI sarà eguale al rettangolo dell'altre due CD, CG. Quindi, siccome il settore ICL si ha, con moltiplicare l'arco IL per la metà della CG; così si avrà il triangolo CAI, con moltiplicare la CD per la metà della stessa CG. Onde, essendo lo spazio circolare AILC eguale al settore, ed al triangolo uniti insieme, si avrà lo stesso spazio, con aggiungere la CD all'arco IL, e con moltiplicare la loro somma per la metà della CG; ed in conseguenza con maggior compendio si avrà la superficie curva della mezza unghietta, con moltiplicare la stessa somma per la metà della DK.

399. Ecco adunque, come date le tre rette CA, CD, CK, da cui la mezza unghietta CDKA riceve la sua determinazione, dee farsi il calcolo, per

per definire presso a poco la sua superficie curva. Prendasi primieramente la differenza tra li quadrati delle due CA, CD; e siccome colla sua radice quadrata si ha la CF, così, con ritrovare la terza proporzionale dopo le due CF, CA, si avrà la CG, che è il raggio del quadrante circolare GIL. Facciasi di poi, come CG a CA, così il raggio del canone trigonometrico ad un quarto proporzionale; e veggasi nello stesso canone, di quanti gradi, e minuti sia l'arco, a cui corrisponde come seno il quarto proporzionale ritrovato. E poichè di altrettanti gradi, e minuti dee essere ancora l'arco IL, di cui è seno la CA; si farà nota la ragione, che serba lo stesso arco coll'intero quadrante GIL.

400. Determinisi in appresso la lunghezza del quadrante GIL, per mezzo del teorema di Archimede, che il diametro di qualsisia cerchio sia alla sua circonferenza quasi, come 7 a 22; ed essendo nota la ragione tra l'arco IL, e lo stesso quadrante, potrà determinarsi altresì la lunghezza dell'arco IL. Onde, se dopo essersi determinata la sua lunghezza, aggiungasi ad essa la CD, e moltiplichisi la loro somma per la metà della DK; col prodotto di questa moltiplicazione si avrà presso a

poco la ſuperficie curva della mezza unghietta C D K A.

401. Per ſchiarire il calcolo da farſi con qualche eſempio, pongaſi, che la C A ſia di palmi 15, la C D di palmi 12, e la D K di palmi 20. Eſſendo adunque 225 il quadrato di 15, e 144 il quadrato di 12, ſarà 81 la loro differenza; e pertanto, eſſendo 9 la radice quadrata di 81, ſarà la C F di 9 palmi. Conforme poi il terzo proporzionale dopo li due numeri 9, e 15 è 25, così ſarà la C G di palmi 25; onde, ſe facciaſi, come 25 a 15, così il raggio del canone trigonometrico ad un quarto proporzionale, ſi ritroverà egli eſſere 600000, il quale rapportaſi come ſeno ad un' arco preſſo a poco di 36 gradi, e 52 minuti; ed in conſeguenza ancora l' arco I L dovrà eſſere di altrettanti gradi, e minuti.

402. Quindi, con ridurre li gradi, così dell' arco, come del quadrante eziandio a minuti, ſarà l' arco I L al quadrante G I L, come 2212 a 5400, o pure come 553 a 1350. Onde, eſſendo di palmi 157, e $\frac{2}{7}$ la circonferenza del cerchio, che ha per raggio la C G, ſarà il quadrante G I L di palmi 39, e $\frac{2}{7}$, e l' arco I L di palmi 16'093. Aggiungaſi adunque a queſt' arco la C D, che è di palmi 12; e conforme il

il prodotto, che si ha, con moltiplicare la loro somma 28'093 per la metà della CK, cioè per 10, è 280'093, così la superficie curva della mezza unghietta sarà presso a poco di 280'093 palmi quadrati.

403. Pongasi in appresso, che nel quadrante ellittico CAD sia al contrario CD la metà dell'asse maggiore, e CA la metà dell'altro minore. Ed in quest'altro caso, se essendo F il foco dello stesso quadrante, facciasi di nuovo, che CF sia a CA, come CA a CG; secondo è stato ancora dimostrato, sarà terminata la figura AE*d*C da un'arco dell'iperbole, che ha la CD, o sia C*d* per metà dell'asse proprio, e la CG per metà dell'altro conjugato; e sarà altresì la AE eguale alla metà del parametro AH. Onde, se determinisi lo spazio iperbolico AE*d*C, e facciasi, come CD a CK, così lo stesso spazio ad un quarto proporzionale; si avrà con esso la superficie curva della mezza unghietta CDKA. *Fig.* 81.

404. Se poi sulla C*d* prendasi la CL di lunghezza tale, che sia eguale alla CG, e descrivasi l'iperbole equilatera LI, che avendo la CL per metà dell'asse proprio, s'incontri colla AE nel punto I; attenta l'indole delle due iperboli, dee essere nella ragio-

 ne

ne di CD a CG, tanto AE ad AI, quanto lo ſpazio AE*d*C allo ſpazio AILC. Onde, ſe facciaſi, come CG a CK, così lo ſpazio AILC ad un quarto proporzionale; ancora con eſſo ſi avrà la ſuperficie curva della mezza unghietta CDKA. Ed eſſendo così, conforme per avere il valore dello ſpazio AILC, ſi ha biſogno di un logaritmo iperbolico; così per mezzo dello ſteſſo logaritmo dovrà determinarſi la riferita ſuperficie.

405. In fatti, ſe CX ſia l'aſintoto dell' iperbole equilatera LI, e su di eſſo ſi abbaſſino l'ordinate LS, IV; ſi avrà lo ſpazio LSVI, compreſo tra queſte due ordinate, con moltiplicare il quadrato della CS per lo logaritmo iperbolico della CV; onde, eſſendo lo ſpazio LSVI eguale al ſettore LCI, ſi avrà l' intero ſpazio AILC, con aggiungere a quel prodotto il triangolo CAI. Per eſſere poi il quadrato della CS eguale alla metà del quadrato della CL, o ſia CG, e per averſi il triangolo CAI quì ancora, con moltiplicare la CD per la metà della CG; ſi avrà lo ſteſſo ſpazio, con aggiungere la CD al prodotto della CG per lo logaritmo iperbolico della CV, e con moltiplicare la loro ſomma per la metà della ſteſſa CG; onde

onde con maggior compendio si avrà la superficie curva della mezza unghietta, con moltiplicare la stessa somma per la metà della CK.

406. Or per ritrovare il logaritmo iperbolico della CV, fa duopo prima definire la ragione, che la stessa CV serba colla CS, che nel sistema delli logaritmi iperbolici dee prendersi per unità. Io dico adunque, che CV sia a CS, come sta la somma delle due CA, AI a CL, o sia CG. Per dimostrarlo, prolunghisi la IV per fino a che s' incontri colla CA nel punto Z; e facendosi equiangoli li due triangoli CVZ, CSL, sarà CV a CS, come CZ a CL. Ma, per essere isoscele il triangolo AIZ, sono eguali le due AI, AZ, ed in conseguenza la CZ è eguale alla somma delle due CA, AI. Dunque CV sarà a CS, come la somma delle due CA, AI a CL o sia CG.

407. Ecco dunque, come date le tre rette CA, CD, CK, da cui la mezza unghietta CDKA riceve la sua determinazione, dee farsi il calcolo in quest' altro caso, per definire presso a poco la sua superficie curva. Prendasi primieramente la differenza tra li quadrati delle due CD, CA, e siccome colla sua radice quadrata si ha la CF; così,

così, con ritrovare la terza proporzionale dopo le due CF, CA, si avrà la CG, o sia CL. Facciasi di poi, come CA a CG, così CD ad una quarta proporzionale; ed avendosi con essa la AI, sarà nota la ragione, così tra la somma delle due CA, AI, e la AL, come tra le due CV, CS.

408. Prendasi in appresso nel canone logaritmico, che abbiamo, così il logaritmo del numero 2, come il logaritmo del numero, che ci addita la quantità della riferita ragione; e facciasi, come il primo di essi al secondo, così il logaritmo iperbolico del 2, che è 0'69314719 ad un quarto proporzionale. Con esso adunque si avrà il logaritmo iperbolico della CV; onde, se al prodotto della CG per lo stesso logaritmo aggiungasi la CD, e moltiplichisi la loro somma per la metà della DK, col prodotto di questa moltiplicazione si avrà presso a poco la superficie curva della mezza unghietta CDKA.

409. Nel calcolo intanto da farsi basta impiegare le sole prime quattro note degl' uni, e degl' altri logaritmi, onde potrà prendersi 0'693 per logaritmo iperbolico del 2. Per schiarirlo con qualche esempio, sia la CA di palmi 12, la CD di palmi 20, e la DK di

di palmi 26. Essendo adunque 400 il quadrato di 20, e 144 il quadrato di 12, sarà 256 la loro differenza; e pertanto, essendo 16 la radice quadrata di 256, sarà la CF di 16 palmi. Conforme poi è 9 il terzo proporzionale dopo li due numeri 16, e 12, così sarà la CG, o sia CL di palmi 9; onde se facciasi, come 12 a 9, così 20 ad un quarto proporzionale, si ritroverà egli essere 15; ed in conseguenza, facendosi la AI di 15 palmi, sarà di 27 a 9 la ragione, così della somma delle due CA, AI ad AL, come della CV alla CS.

410. Or essendo 3 la quantità di questa ragione, chiaro si è, che prendendosi la CS per unità, debba additarci la CV il numero 3; onde, essendo nel canone, che abbiamo, o'301 il logaritmo del 2, e o'477 il logaritmo del 3, se facciasi, come o'301 a o'477, così o'693 ad un quarto proporzionale; sarà 1'098 il logaritmo iperbolico della CV; e pertanto il prodotto della CG, che è di 9 palmi, per questo logaritmo, sarà 9'882. Aggiungasi adunque a questo prodotto la CD, che è di 20 palmi; e poichè, con moltiplicare la loro somma 29'882 per la metà della DK, cioè per 13, si ha 388'466, dovrà conchiudersi, che la superficie

curva della mezza unghietta CDKA ſia preſſo a poco di 388'466 palmi quadrati.

411. Mi ſon diſteſo più del mio ſolito intorno a queſte mezze unghiette, per lo biſogno, che ſi ha di eſſe nella miſura delle volte, in cui ſogliono impiegarſi; anzi per queſto motivo ho ſtimato altresì neceſſario, di ſchiarire con qualche eſempio il calcolo da farſi, per determinare la loro ſuperficie curva. Noteremo intanto, che attenta la dimoſtrazione delli due teoremi, da cui ſi è ricavato il modo di porre a calcolo la loro ſolidità, e la loro ſuperficie curva, ſe per mezzo del triangolo
Fig. NMR parallelo all' altro CDK riſe-
79. chiſi dalla mezza unghietta CDKA la porzione NMRA; pure cogli ſteſſi teoremi potrà determinarſi, tanto la ſolidità, quanto la ſuperficie curva di queſta porzione; ma baſta ciò di eſſerſi avvertito, maggiormente, che non mai occorre di doverſi porre a calcolo una tale porzione.

412. Se nel quadrante ellittico CAD ponganſi eguali le due CA, CD, che ſono le metà delli due aſſi dell' elliſſe, conforme lo ſteſſo quadrante diventa circolare, così ſarà circolare ancora il cilindro, da cui è riſecata la mezza unghietta CDKA; ma ſe bene, eſſendo

ſendo ella di queſta indole, tutta via ſi abbia la ſua ſolidità, con moltiplicare il triangolo C D K, che ſerve ad eſſa di baſe, per gli due terzi della ſua altezza C A; nientedimeno la ſua ſuperficie curva, ſecondo è ſtato dimoſtrato negl' Elementi della Geometria ſolida, ſi farà eguale al doppio del triangolo C D K. Ed in fatti, con eſſere eguali le due C A, C D, conforme il foco F ſi riuniſce col centro C, così al contrario il punto G diſcoſtaſi infinitamente dallo ſteſſo centro; onde l' arco E O *d*, ſia dell' elliſſe, ſia dell' iperbole, da cui è terminata la figura AE*d*C, cambiaſi in una retta parallela alla C A. *Fig.* 80. 81.

413. Del rimanente il cilindro ellittico dee riguardarſi, come porzione del cilindro circolare, per la ragione, che conforme, con ſegare il cilindro circolare per un piano parallelo alla ſua baſe, ſi ha un cerchio eguale alla ſteſſa baſe; così, ſi avrà un' elliſſe, ſe ſeghiſi lo ſteſſo cilindro per un piano, che incontrandoſi col ſuo aſſe, ſia obbliquamente ſituato per rapporto alla ſua baſe; e per queſta ſteſſa ragione chiaro ancora ſi è, che il cilindro ellittico retto ſia porzione del cilindro circolare ſcaleno, ed al contrario il cilindro ellittico ſcaleno ſia porzione del ci-

cilindro circolare retto. Conforme poi sull' ellisse può formarsi ancora un cono, tanto retto, quanto scaleno; così per la medesima ragione il primo sarà porzione del cono circolare scaleno, ed al contrario il secondo sarà porzione del cono circolare retto.

414. Avendosi intanto un cilindro ellittico, si determinerà, tanto la sua solidità, quanto la sua superficie cilindrica, come determinansi nel cilindro circolare. In fatti, conforme si ha la sua solidità col prodotto della base per l' altezza, così la sua superficie cilindrica si avrà, con moltiplicare il lato della stessa superficie per lo perimetro della base, essendo il cilindro retto; e per lo perimetro della sezione, fatta per un piano perpendicolare allo stesso lato, essendo scaleno. Quantunque poi la solidità del cono ellittico similmente si abbia col prodotto della sua base per la sua altezza; nientedimeno tuttavia si desidera un modo di determinare il prossimo valore della superficie conica, tanto se il cono sia retto, quanto se sia scaleno, che possa porsi in pratica.

415. La stessa difficoltà tuttavolta s' incontra nella determinazione della superficie cilindrica del cilindro ellittico, così retto, come scaleno; poichè, siccome per averla deesi moltiplicare il lato

lato della superficie per lo perimetro di un' ellisse; così non ancora da Geometri si è ritrovato un modo facile di determinare il prossimo valore, così dell' intero perimetro, come di qualsisia arco dell' ellisse; anzi un modo consimile si desidera altresì per la determinazione di un' arco d' iperbole: dimodochè delle tre curve la sola parabola ha il vantaggio, di potersi determinare presso a poco la lunghezza di qualsisia suo arco per mezzo delli logaritmi iperbolici.

§. XXVII.

Del problema delle due mezze proporzionali.

416. SEcondo avvertimmo sul principio di questo trattato, non per altro motivo gl' antichi Geometri pensarono ad altre curve, e specialmente alle tre, che ricavansi dalla varia sezione del cono, se non se per poter risolvere li problemi, che essi stessi chiamarono solidi; onde rimane a far vedere brevemente, come per mezzo delle condizioni apposte ne' problemi possa venirsi in cognizione delle curve, da cui dee ripetersi la loro soluzione, restringendoci ai due principali, a cui riduconsi tutti gl' altri, cioè alla ricerca di

di due mezze proporzionali tra due rette date, ed alla trisezione di un dato angolo rettilineo, o sia di un dato arco circolare.

Fig. 82. 417. Adunque per quanto al primo, siano AB, AC le due rette, tra le quali debbonsi ritrovare le due mezze proporzionali; e situate le medesime in modo, che l'angolo BAC da esse contenuto sia retto, distendasi la AB verso D, e la AC verso E. Pongasi, che AN, AO, prese sulle due AD, AE, siano le due mezze proporzionali, che si dimandano. Essendo adunque AB ad AN, come AN ad AO, sarà il quadrato della AN eguale al rettangolo delle due AB, AO; e così ancora, essendo AN ad AO, come AO ad AC, sarà il quadrato della AO eguale al rettangolo delle due AC, AN.

418. Or queste due uguaglianze, ricavate dalle condizioni stesse del problema, ci danno a divedere, che le due AN, AO siano ordinate di due parabole, li di cui assi hanno per loro parametri le due rette date AB, AC. Descrivansi adunque le due parabole AX, AZ, che abbiano per loro assi le due AD, AE, e per parametri degli stessi assi l'altre due AB, AC; e se dal punto M, in cui intersegansi queste due parabole, si abbassino le perpen-

pendicolari M N, M O sulli medesimi assi, rimaneranno determinate le due A N, A O.

419. Lo stesso problema ci somministra ancora una terza uguaglianza, e si è, che il rettangolo delle due A N, A O sia eguale al rettangolo delle due rette date A B, A C; onde, siccome questa terza uguaglianza ci conduce ad un'iperbole equilatera, considerata per rapporto ai suoi asintoti, così coll' intersegamento di essa con una delle due parabole potranno determinarsi ancora le due AN, AO; ed in fatti, se colli due asintoti AD, AE descrivasi l'iperbole equilatera V R, la di cui potenza sia il rettangolo delle due A B, A C, questa parimente s'intersegherà con ciascuna delle due parabole nel punto M, per mezzo di cui determinansi le due A N, A O.

420. Dal medesimo problema può dedursi inoltre una quarta uguaglianza. Imperocchè, essendo il quadrato della AN eguale al rettangolo delle due AB, A O, ed il quadrato della A O eguale al rettangolo delle due A C, A N; sarà il rettangolo delle due A B, A O insieme col quadrato della A O eguale al rettangolo delle due A C, A N insieme col quadrato della A N. Onde la quarta uguaglianza si è, che il rettan-

tangolo delle due A O, B O ſia eguale al rettangolo dell' altre due AN, CN, la quale uguaglianza eziandio ci conduce ad un' iperbole equilatera, ma conſiderata per rapporto al ſuo proprio aſſe.

421. Pongaſi perciò, che la AB ſia maggiore della AC, e dividanſi ambedue per metà ne' punti F, e G; compiſcaſi di poi il rettangolo A H, e tagliſi dalla G H la H I in modo, che il quadrato della AG, ovvero CG ſia eguale alla differenza degl'altri due, fatti dalla G H, e dalla H I. Se adunque deſcrivaſi l' iperbole equilatera T I S, che abbia per centro il punto H, e per vertice principale il punto I; queſta dovrà paſſare per gli punti A, e C; ed interſegandoſi con una delle due parabole, o pure coll' altra iperbole equilatera, eziandio ci darà il punto M, per mezzo di cui determinanſi le due A N, A O.

Fig. 83. 422. Finalmente dallo ſteſſo problema può dedurſi una quinta uguaglianza, per cui facciaſi la AD eguale alla AB, e la A E eguale alla A C. In fatti, eſſendo il quadrato della A N eguale al rettangolo delle due A D, A O, ed il quadrato della A O eguale al rettangolo delle due A E, A N; ſarà la differenza tra il rettangolo delle le due AD, AO, ed il quadrato della AO eguale alla differenza tra il rettangolo delle due AE, AN, ed il quadrato della AN. Onde la quinta uguaglianza si è, che il rettangolo delle due AO, DO sia eguale al rettangolo dell'altre due AN, EN, la quale uguaglianza ci conduce alla circonferenza di un cerchio, ed ecco come.

423. Pongasi di nuovo, che la AD sia maggiore della AE, e dividansi ambedue per metà ne' punti F, e G. Se adunque compiscasi il rettangolo AH saranno eguali le tre HA, HD, HE; e per tanto il cerchio, descritto col centro H, e coll'intervallo della prima di esse HA, dovrà passare per gl'altri due punti D, ed E; onde, intersegandosi la sua circonferenza, o con una delle due parabole, o con una delle due iperboli equilatere, tuttavia si avrà il punto M, per mezzo di cui determinansi le due AN, AO.

424. Dalle condizioni adunque del problema si sono ricavate cinque uguaglianze, che ci hanno condotto a cinque curve diverse; onde, combinando queste curve a due a due, potremo risolvere il problema in dieci differenti maniere; ma tra queste diverse soluzioni, non v'ha dubbio, che quelle debbano essere preferite, in cui impiegasi la circon-

conferenza del cerchio; onde, se con essa vogliasi accoppiare una delle due parabole, ecco come dovranno ritrovarsi due mezze proporzionali tra le due rette date A D, A E.

Fig. 83. 425. Pongasi, che la AD sia maggiore della A E, e formato con esse l'angolo retto D A E, dividansi ambedue per metà ne' punti F, e G. Compiscasi di poi il rettangolo F G, e descrivasi il cerchio A D E col centro H, e coll' intervallo di una delle tre H A, H D, H E, che sono tra di loro eguali. Finalmente coll' asse A D, e col parametro della stessa AD descrivasi la parabola A X, che s' intersighi colla circonferenza del cerchio nel punto M; ed abbassata sull' asse AD la perpendicolare M O, saranno M O, A O le due mezze proporzionali, che si dimandano.

426. Per dimostrarlo, prolunghisi la M O per fino a che s' incontri di nuovo colla circonferenza del cerchio nel punto P, e su di essa si abbassi la perpendicolare EQ. Essendo adunque, per la parabola, il quadrato della M O eguale al rettangolo delle due AD, AO; ed essendo, per lo cerchio, il rettangolo delle due MO, PO, o pure delle due M O, M Q eguale al rettangolo dell' altre due A O, D O; sarà il rettangolo

lo delle due MO, OQ eguale al quadrato della AO. Onde, dovendo essere MO ad AO, come AO ad OQ, o sia AE, ed essendo per la parabola AD ad MO, come MO ad AO; saranno le quattro AD, MO, AO, AE continuamente proporzionali.

427. Tra gl' antichi Geometri intanto vi furono alcuni, che pensarono ad altre curve per la soluzione del problema, di cui si tratta: come in fatti uno di essi, chiamato Diocle, credette, potersi risolvere il problema più facilmente per mezzo della sua cissoide AOX, *Fig.* che ricavava dal cerchio AMB, con 84. prolungare ciascuna delle sue ordinate MN talmente per fino al punto O, che la NO fosse quarta proporzionale dopo le tre BN, MN, AN; dimodochè, siccome queste tre formano una proporzione continua, così ancora le quattro BN, MN, AN, NO fossero continuamente proporzionali; ed ecco, come per mezzo di questa curva ritrovava egli due mezze proporzionali tra due rette date.

428. Siano P, ed S le due rette date. Elevisi su 'l diametro del cerchio AB la perpendicolare AD di lunghezza tale, che AB sia ad AD, come P ad S; indi congiungasi la BD, che s' incontri colla cissoide nel punto O, ed

ed a questo punto tirisi la M O parallela alla A D. Facciasi di poi, come B N ad M N, così P a Q; e come M N ad A N, così Q ad R; ed essendo P ad S, come A B ad A D, o pure come BN, NO, saranno le quattro P, Q, R, S proporzionali coll'altre quattro B N, M N, A N, N O; ed in conseguenza quelle ancora a simiglianza di queste saranno continuamente proporzionali.

429. Può descriversi questa curva colla squadra TAV, che si aggiri intorno al punto A, e colla riga G H, che si muova sul diametro AC in modo, che insista su di esso sempre ad angoli retti. Imperocchè, se la rivoluzione della squadra, ed il moto della riga facciansi con legge tale, che la riga s'interseghi col lato AV della squadra sulla circonferenza del cerchio AMB; si avranno li punti della curva coll'intersegamento della stessa riga coll'altro lato della squadra A T; ed attenta questa descrizione chiaramente si vede, che la B Z, ultima ordinata della curva, corrispondente al punto B, debba essere suo asintoto.

Fig. 85. 430. Un' altro antico Geometra, chiamato Nicomede, fu ancora di sentimento, potersi ritrovare con maggior facilità due mezze proporzionali tra due rette

rette date per mezzo della ſua concoide MAM, in cui ſono eguali, non già le rette CM, tirate alla curva dal punto C, dato di poſizione, ma le porzioni di eſſe OM, compreſe tra la DE, ſimilmente data di poſizione, e la ſteſſa curva. Conforme poi di queſta ſua concoide chiamava polo il punto C, direttrice la DE, aſſe la CA perpendicolare ſulla DE, vertice il punto A, ed intervallo la porzione AB dell'aſſe; così egli ſteſſo conobbe, eſſere la direttrice DE aſintoto della curva, per la ragione, che quanto più la CM inclinaſi ſulla DE, tanto maggiormente minoraſi la diſtanza del punto M dalle ſteſſa DE.

431. Si avrà la deſcrizione di queſt' altra curva, ſe portandoſi ſulla DE il centro O del cerchio MR*m*, deſcritto col raggio AB, aggiriſi la riga CV intorno al polo C in modo, che paſſi ſempre per lo centro di quel cerchio; poichè, facendoſi la porzione della riga OM, compreſa tra il centro, e la circonferenza del cerchio, eguale alla AB, ſi avranno li punti della curva col continuo interſegamento della ſteſſa riga, e della ſteſſa circonferenza. Ma, ſiccome la riga CV interſegaſi colla circonferenza del cerchio MR*m* ancora dall' altra parte della DE nel punto

m;

m; così con queſt' altro interſegamento ſi avrà un' altra concoide *m a m* compagna della prima, la quale dovrà annodarſi nel polo C, e formare un'ovale tra queſto polo, ed il ſuo vertice *a*, ſe mai la AB ſia maggiore della BC.

432. Pensò a queſta curva Nicomede, poichè ſiccome per mezzo di eſſa riſolveſi facilmente il problema, di adattare in un dato angolo una retta, che ſia eguale ad un' altra retta data, e paſſi per un dato punto; così a queſto può ridurſi l'altro principale, di ritrovare due mezze proporzionali tra due rette
Fig. date. Per dimoſtrarlo, ſiano AB, AC
86. le due rette date, colle quali formiſi primieramente il rettangolo AD; indi, diviſa la maggiore di eſſe AB per metà nel punto E, congiungaſi la DE, che s' incontri coll' altra minore AC nel punto F. Dividaſi di poi queſt'altra AC ancora per metà nel punto G; ed alzata su di eſſa la perpendicolare GH talmente lunga, che facciaſi la CH eguale alla BE, tiriſi la CI parallela alla FH. Finalmente, prolungata la AC verſo K, adattiſi nell' angolo ICK la KI in modo, che ſia eguale alla CH, o ſia BE, e paſſi prolungata per lo punto H.

433. Ciò fatto, congiungaſi la KD, che

che s' incontri colla A B nel punto L; ed io dico, che CK, BL siano le due mezze proporzionali tra le due rette date A B, A C. In fatti, essendo eguali le due A E, B E saranno eguali ancora l' altre due A F, B D; onde, facendosi la CF dupla della AC, sarà A B a B E, come C F ad A C. Ma, per gli triangoli equiangoli DBL, KCD, B L sta a C D, o sia A B, come B D, ovvero A C a C K. Dunque perturbando sarà BL a BE, come CF a CK; ed in conseguenza componendo LE sarà a BE, come FK a CK, o pure come H K a K I. Quindi, conforme sono eguali le due B E, K I, così saranno eguali ancora l' altre due L E, H K; e per tanto il quadrato della L E sarà eziandio eguale al quadrato della HK.

434. Siccome poi il quadrato della L E è eguale al rettangolo delle due A L, B L insieme col quadrato della B E; così il quadrato della H K, come eguale ai quadrati delle due G K, G H, sarà eguale al rettangolo delle due A K, C K insieme col quadrato della C H. Onde, essendo il quadrato della BE eguale al quadrato della CH, sarà il rettangolo delle due A L, B L ancora eguale al rettangolo dell' altre due A K, C K; e pertanto C K sarà a B L, come A L ad A K. Ma nella

ragione di AL ad AK sta, così AB a CK, come BL ad AC. Dunque, rafacendosi eguali tra di loro le tre ragioni di AB a CK, di CK a BL, e di BL ad AC, saranno le quattro AB, CK, BL, AC continuamente proporzionali.

435. Adunque, per mezzo della riferita construzione, ritrovansi due mezze proporzionali tra le due rette date AB, AC, con adattare nell' angolo ICK la KI in modo, che sia eguale alla CH, e passi prolungata per lo punto H. Ma, conforme da Nicomede determinavasi il punto K, per cui dee tirarsi la HK, con descrivere la sua concoide col polo H, colla direttrice CI, e coll' intervallo della CH; così da altri antichi Geometri risolvevasi lo stesso problema, a cui riducesi l' altro principale delle due mezze proporzionali, col cerchio, e coll' iperbole; ed
Fig. ecco come. Sia BAC l' angolo, in cui
87. dee adattarsi una retta, che sia eguale ad un' altra data retta, e passi prolungata per lo punto dato D.

436. Supposto il problema già risoluto, sia CE la retta adattata nel dato angolo; e tirate le due DB, BH parallele all' altre due AC, EC, compiscansi li due parallelogrammi BF, BC. Essendo adunque eguali le due

BH,

BH, EC, il punto H, da cui dipende la soluzione del problema, sarà situato nella circonferenza del cerchio, che descrivesi col centro B, e coll' intervallo della retta data EC. Ma lo stesso punto ritrovasi ancora nell'iperbole, che avendo per asintoti le due FC, FD, passa per lo punto B, per la ragione, che essendo CF ad FD, o sia AB, come DB a BE, o pure come FA a CH, il rettangolo delle due CF, CH è eguale al rettangolo dell' altre due AF, AB. Dunque, se descrivasi, così quel cerchio, come questa iperbole, col loro intersegamento rimanerà determinata la posizione del punto H.

437. Or, conforme la circonferenza del cerchio intersegasi coll' iperbole, non solo nel punto H, ma altresì nell' altro *b*; così ancora di quest'altro punto si ha bisogno per l' intera soluzione del problema, di cui si tratta. In fatti la retta dee adattarsi propriamente tra le due AB, AC, che contengono l'angolo BAC; ma niente vieta di prolungare queste due dall'altra parte verso *b*, e *c*; onde, siccome con esse così prolungate formasi l' altro angolo *b*A*c* eguale al primo BAC, così la retta dovrà adattarsi ancora tra le due A*b*, A*c*; e perciò, se *ce* sia la retta adattata tra di esse, e compiscasi il paral-

lelogrammo *e h*, si ritroverà il punto *h* nella stessa iperbole, e nella stessa circonferenza di cerchio.

§. XXVIII.

Del problema della trisezione dell'angolo.

438. PAsseremo ora all'altro problema, in cui trattasi, di dividere in tre parti eguali un dato angolo, o sia un dato arco circolare; e poichè si ha il cerchio, a cui rapportasi l'arco dato, basterà per la soluzione di esso ritrovare un'altra curva, che intersegandosi colla circonferenza di quel cerchio, determini il punto, a cui il
Fig. problema si riduce. Sia dato adunque
88. nella circonferenza del cerchio B C D l'arco B C, e sia B E la sua terza parte. Congiungansi le corde BC, BE CE; ed essendo l'arco CE duplo dell'arco BE, sarà l'angolo CBE eziandio duplo dell'angolo B C E. Quindi, se dividasi l'angolo C B E in due parti eguali per la retta B F, che s'incontri colla C E nel punto F, saranno eguali le due B F, C F; ed in conseguenza, abbassata sulla B C la perpendicolare F G, resterà divisa la B C per metà nel punto G.

439. Si abbassi ora sulla stessa BC l'altra perpendicolare EH; e per essersi diviso

viſo l'angolo CBE in due parti eguali per la BF, ſarà BC a BE, come CF ad FE, o pure come CG a GH; onde, eſſendo la BC dupla della CG, ſarà la BE ſimilmente dupla della GH; e pertanto li quadrati delle due BH, EH, come eguali al quadrato della BE, ſaranno eguali al quadruplo del quadrato della GH: dalla quale uguaglianza non ſarà difficile il ricavarne, che ſi avrà il punto E, da cui dipende la ſoluzione del problema, ſe tagliata dalla BG la terza parte, che ſia GI, deſcrivaſi un'iperbole, che abbia per vertice principale il punto I, per aſſe proprio la CI, e per parametro il triplo dello ſteſſo aſſe. Per dimoſtrarlo, baſta far vedere, che il quadruplo del quadrato della GH ſia eguale al triplo del rettangolo delle due CH, IH, ed al quadrato della BH.

440. Facciaſi perciò la GK eguale alla GI, ed il quadruplo del quadrato della GH, come eguale al quadruplo del rettangolo delle due KH, IH, ed al quadruplo del quadrato della GI, ſarà eguale al duplo del rettangolo delle due CH, IH, al duplo del quadrato della IH, ed al quadrato della BI. Ma, per eſſere li quadrati delle due BI, IH eguali al duplo del rettangolo delle ſteſſe due BI, IH, ed al quadrato della BH, dee eſſere altresì

tresì il quadrato della B I insieme col duplo del quadrato della I H eguale al rettangolo delle due C H, I H, ed al quadrato della B H. Dunque sarà il quadruplo del quadrato della G H eguale al triplo del rettangolo delle due C H, I H, ed al quadrato della B H.

441. Non è dunque da porsi in dubbio, che la riferita iperbole debba intersegarsi colla circonferenza del cerchio B C D nel punto E; ma, siccome la stessa iperbole intersegasi colla stessa circonferenza ancora dall'altra parte della B C nel punto *e*, così per mezzo di essa si avrà la trisezione eziandio dell' altro arco B D C. Ed in fatti, se B *e* sia la sua terza parte, e congiungansi le corde B *e*, C *e*; pure sarà l' angolo C B *e* duplo dell' angolo B C *e*; onde, se dividasi l' angolo C B *e* in due parti eguali per la retta B *f*, che s' incontri colla C *e* nel punto *f*, pure saranno eguali le due B *f*, C *f*; e pertanto, siccome abbassata sulla B C la perpendicolare *e h*, ancora si fa la B *e* dupla della G *h*, così li quadrati delle due *e h*, B *h* saranno eziandio quadrupli del quadrato della G *h*.

Fig. 89. 442. Per dare dello stesso problema un' altra soluzione, sia il cerchio BCK, e debbasi dividere in tre parti eguali, così l' angolo B A C, situato nel centro

tro del cerchio, come l'arco BC, che è la sua misura. Pongasi, che siano eguali li tre archi BD, DE, EC; e conforme debbono essere eguali ancora le loro corde, così se li raggi AD, AE s' incontrino colla BC ne' punti F, e G, saranno isosceli li due triangoli BDF, CEG; ed in conseguenza sarà la BF eguale alla BD, e la la CG eguale alla CE. Ma, tirata la DH parallela alla EG, che s'incontri colla stessa BC nel punto H, si fanno eguali ancora le due GH, DE. Dunque, dovendo essere la BC insieme colla FH eguale al triplo della BD, sarà il rettangolo delle due BC, BD insieme col rettangolo delle due FH, BD eguale al triplo del quadrato della BD.

443. Or, essendo equiangoli li due triangoli ABD, BDF, sarà AB a BD, come BD a BF; e pertanto il quadrato della BD sarà eguale al rettangolo delle due AB, DF, la quale uguaglianza ci conduce ad una parabola. Ma, per essere equiangoli ancora li due triangoli BDF, DFH, BD sta a DF, come DF a FH. Dunque, essendo il rettangolo delle due FH, BD eguale al quadrato della DF, sarà il rettangolo delle due BC, BD insieme col quadrato della DF eguale al triplo del quadrato della BD, o

 pure

pure al triplo del rettangolo delle due A B , D F , la quale uguaglianza ci conduce ad un'altra parabola . Onde , se descrivansi queste due parabole, col loro intersegamento resterà determinata, tanto la B D, quanto la D F .

444. Se poi congiunganfi insieme le due riferite uguaglianze, sarà altresì il rettangolo delle due B C, B D insieme colli quadrati delle due B D , D F eguale al quadruplo del rettangolo delle due A B , D F . Onde , siccome questa terza uguaglianza ci conduce ad un cerchio, così si potranno determinare ancora le due B D , D F coll' intersegamento di questo cerchio con una delle due parabole . Ed in fatti , se scelgasi la prima parabola , a cui ci conduce l' uguaglianza tra il quadrato della BD, ed il rettangolo delle due AB, D F, ecco come dovrà combinarsi con essa il cerchio , che si ha colla terza uguaglianza , per determinare così la B D, come la D F.

445. Descrivasi primieramente la parabola X P Z , che abbia per asse la P Q , e per parametro il raggio A B del dato cerchio; indi, tagliata dall'asse P Q la porzione P R , che sia eguale al doppio dello stesso raggio , si alzi su di essa la perpendicolare R S eguale alla metà della corda B C , da cui è soste-

ſoſtenuto l' arco, che dee dividerſi in tre parti eguali; deſcrivaſi finalmente col centro S, e coll' intervallo della S P il cerchio P M V, che s' interſeghi colla parabola nel punto M; ed abbaſſata da queſto punto ſull' aſſe della parabola P Q l' ordinata M N, ſarà la MN eguale alla BD, e la PN eguale alla D F.

446. La dimoſtrazione dee ripeterſi da ciò, che attenta la proprietà, così della parabola, come del cerchio, ritrovanſi per le due M N, P N le ſteſſe uguaglianze, che la ſuppoſta triſezione dell' arco B D C ci ha ſomminiſtrate per le due B D, D F; il che non potrebbe avvenire, ſe non foſſe la M N eguale alla B D, e la P N eguale alla D F. Conforme poi il cerchio, e la parabola interſeganſi dallo ſteſſo lato dell' aſſe P Q nell' altro punto m, così, ſe ſi abbaſſi da eſſo ſullo ſteſſo aſſe l' altra ordinata mn, ſi avranno colle due mn, Pn le rette conſimili per la triſezione del rimanente arco B K C del cerchio dato, che è ſoſtenuto dalla ſteſſa corda B C.

447. Non vedeſi intanto, di che uſo poſſa eſſere il terzo punto μ, in cui interſegaſi il cerchio colla parabola dall' altro lato dell' aſſe P Q. Ma egli è da rifletterſi, che qualora riſolveſi il

problema colla ricerca della B D, che ſoſtiene la terza parte dell' arco BDC, ſi fa paſſaggio ad un' altro problema, il quale ſi è, di ritrovare una retta, che applicata dal punto B tre volte nel dato cerchio, giunga finalmente al punto C. Onde, potendo eſſere queſta retta eziandio la corda, che ſoſtiene la terza parte dell' arco, che ſi ha, con unire alla circonferenza intera l' arco B D C; perciò la terza ordinata $\mu\nu$, abbaſſata dal punto μ ſull' aſſe P Q, ſervirà per determinare queſt'altra corda.

448. Ancora il problema della triſezione dell' angolo può ridurſi all'altro, di adattare in un dato angolo una retta, che ſia eguale ad un' altra retta data, e paſſi per un dato punto; ma prima di dimoſtrarlo, ſi vuol notare, che colla diviſione di un' angolo acuto in tre parti eguali, ſi ha ancora quella dell' ottuſo, che forma due retti inſieme coll' acuto. In fatti, ſiccome la terza parte di un' angolo retto ſi ha, con deſcrivere ſopra uno de' ſuoi lati il triangolo equilatero; così col duplo di eſſa ſi avrà la terza parte di due retti. Onde, ſe dal ſuo duplo tolgaſi la terza parte dell' angolo acuto, chiaro ſi è, che il reſiduo debba eſſere la terza parte dell' altro ottuſo.

449. Eſſendo così, baſterà far vedere,

dere, come col riferito problema possa dividersi in tre parti eguali qualsisia angolo acuto. Sia perciò B A C l'angolo acuto, e dal punto B, preso nel lato di esso A B, si abbassi sull'altro lato A C la perpendicolare B C; indi, terminato il parallelogrammo C D, e prolungato il lato di esso D B verso E, adattisi nell'angolo retto C B E la E F in modo, che sia eguale al duplo della AB, e passi prolungata per lo punto A. Io dico, che l'angolo C A F sia la terza parte del proposto angolo acuto BAC. Per dimostrarlo, dividasi la E F per metà nel punto G, e congiungasi la B G. *Fig.* 90.

450. Essendo adunque la E F dupla della AB, sarà ciascuna delle due EG, F G eguale alla A B. Ma, per essere l'angolo E B F retto, tanto la E G, quanto la FG è eguale ancora alla BG. Dunque saranno eguali parimente le due A B, B G; e pertanto sarà isoscele, così il triangolo ABG, come il triangolo B G E. Quindi l'angolo B A G, come eguale all'angolo B G A, sarà duplo dell'angolo B E G, o pure del suo eguale C A F; ed in conseguenza, facendosi tutto l'angolo B A C triplo dell'angolo C A F, sarà al contrario l'angolo C A F la terza parte del proposto angolo acuto B A C.

§. XXIX.

Del problema della divisione dell' angolo in data ragione.

451. Il problema della trisezione dell' angolo indusse gl'antichi Geometri ad esaminarne un'altro più generale, e si è, di dividere un dato angolo in altri due, che siano tra di loro in data ragione; ma essi stessi conobbero, che per la soluzione, almeno universale, di un tal problema si abbia bisogno di una di quelle curve, che da moderni Geometri chiamansi meccaniche, o più tosto trascendentali; onde per risolverlo, si avvalsero della spirale d' Archimede, la di cui proprietà si è, che li raggi di essa siano nella stessa ragione cogl' archi circolari, a cui corrispondono, siccome ricavasi dalla stessa sua descrizione, che è la seguente.

Fig. 91. 452. Sia il cerchio BOE, e nel mentre, che il suo raggio AB percorre eguabilmente la sua circonferenza, si porti il punto A per tutta la lunghezza dello stesso raggio, eziandio con moto eguabile. Con ambidue li moti adunque si descriverà dal punto A la curva AMB. E poichè nel moto eguabile gli spazj percorsi sono, come li tem-

tempi, in cui si percorrono; chiaro si è, che se ad un punto di essa M tirisi la A M, che riguardasi come suo raggio, e distendasi la stessa AM per sino a che s' incontri colla circonferenza del cerchio nel punto O, debba essere AM ad A B, come l' arco B R O all' intera circonferenza.

453. Attenta questa proprietà della spirale d' Archimede, ecco, come per mezzo di essa può dividersi l' angolo B A O, o sia l'arco B R O in data ragione. Descrivasi col centro A, e coll' intervallo della A M l' arco M C, che s' incontri col raggio A B nel punto C; indi dividasi la A C talmente nel punto D, che A D sia a C D in quella data ragione; descrivasi di poi collo stesso centro A, e coll' intervallo della A D l' altro arco D N, che s' incontri colla spirale nel punto N; e la A R tirata per questo punto dividerà nella stessa data ragione, così l'angolo BAO, come l'arco BRO; poichè, essendo BR a BO, come A N ad A M, o pure come AD ad AC, sarà dividendo BR ad R O, come A D a C D.

454. Fu dato a questa curva il nome di spirale per la ragione, che conforme la rivoluzione eguabile del raggio AB, ed il moto eziandio eguabile del punto A sullo stesso raggio, possono

no continuarsi all' infinito; così la curva stessa, a guisa di spira, farà infiniti giri intorno al punto A. Colla tan-
Fig. 92. gente poi della stessa curva può determinarsi altresì la lunghezza di un arco circolare BRO. In fatti, se MT sia la retta, che tocca la curva nel punto M, e la AT perpendicolare sulla AM s' incontri con essa nel punto T, sarà AM ad AO, come AT all' arco BRO. Per dimostrarlo, sia A*mo* un'altra retta, infinitamente vicina alla prima AMO, e sia ancora *mr* un' archetto circolare, descritto col centro A, e coll' intervallo della A*m*.

455. Essendo adunque equiangoli li due triangoli MAT, M*rm*, sarà AT ad AM, come *mr* ad M*r*, o pure in ragion composta di *mr* ad *o*O, e di *o*O ad M*r*. Ma, per essere li due settori A*mr*, A*o*O simili tra di loro, *mr* sta ad *o*O, come AM ad AO; e per essere le due A*m*, AM nella stessa ragione cogl' archi corrispondenti B*o*, BRO, *o*O sta ad M*r*, come BO ad AM. Dunque sarà AT ad AM in ragion composta di AM ad AO, e di BRO ad AM, o pure nella semplice ragione di BRO ad AO; ed in conseguenza permutando la AT sarà all'arco BRO, come AM ad AO.

456. Può dimostrarsi ancora, che se col

col centro A, coll' intervallo della AM descrivasi l' arco MC, lo spazio, che racchiude la spirale insieme colla AM, sia la terza parte dell'altro circolare ACM. Intendasi perciò diviso l'arco BRO in infiniti archetti eguali tra di loro; e siccome colle rette, tirate dal centro A ai punti della divisione, rimane diviso lo spazio della spirale in infiniti piccioli settori simili tra di loro; così, per essere questi piccioli settori, come li quadrati delli loro raggi, o pure come li quadrati degl' infiniti numeri naturali, la loro somma sarà all' ultimo, preso altrettante volte, come 1 a 3. Ma colla loro somma si ha lo spazio della spirale, e coll'ultimo preso altrettante volte si ha lo spazio circolare. Dunque ancora questi due spazj saranno tra di loro nella ragione di 1 a 3.

457. Avendo questa dimostrazione luogo da per tutto, sarà lo spazio, racchiuso dall' intero primo giro della spirale, eziandio eguale alla terza parte del cerchio BOE, in cui sta compreso lo stesso giro. La stessa dimostrazione intanto ha luogo ancora negli spazj, che dal principio della spirale distendonsi per fino agl'altri giri, coll'avvertenza bensì, che conforme colla somma delli piccioli settori si ha, non solo lo spazio, che si vuol definire, ma ciascuno ancora degl'altri pre-

precedenti, li quali perciò debbonsi togliere da quella somma; così coll'ultimo picciolo settore, preso altrettante volte, si ha non già il semplice cerchio, che racchiude lo spazio, ma il suo moltiplice, disegnato dal luogo, che egli occupa.

458. Quindi lo spazio, che distendesi per fino al secondo giro, insieme coll'altro precedente sarà la terza parte del duplo del cerchio, che lo racchiude. Similmente lo spazio, che distendesi per fino al terzo giro, insieme colli due precedenti, sarà la terza parte del triplo del cerchio, che lo contiene. Per la stessa ragione lo spazio, che distendesi per fino al quarto giro, insieme colli tre precedenti, sarà la terza parte del quadruplo del cerchio, in cui sta racchiuso. E così ancora lo spazio, che distendesi per fino al quinto giro, insieme colli quattro precedenti, sarà la terza parte del quintuplo del cerchio, da cui è contenuto.

459. Essendo adunque li cerchi, come li quadrati delli numeri naturali 1, 4, 9, 16, 25, &c., o pure come 3, 12, 27, 48, 75, &c., conforme il primo spazio sta al cerchio, che lo racchiude, come 1 a 3; così il secondo spazio sarà al cerchio, in cui sta racchiuso, come 7 a 12, il terzo come 19 a 27, il

il quarto come 37 a 48, il quinto come 61 a 75, e così degl' altri. Onde, siccome gli stessi spazj sono tra di loro, come 1, 7, 19, 37, 61 &c., così volendosi tener conto delli soli spazj, che dalla retta di un giro distendonsi per sino alla retta dell'altro giro, che segue, questi saranno, come 1, 6, 12, 18, 24, &c., dimodochè conforme il secondo è sestuplo del primo, così per rapporto al secondo il terzo sarà duplo, il quarto triplo, il quinto quadruplo, e così degl' altri.

460. Per la divisione dell'angolo in data ragione un' antico Geometra, chiamato Dinostrato, pensò ad un' altra curva, a cui per una proprietà sua speciale diede il nome di quadratrice. Per intendere, come egli descriveva questa sua curva, e quale sia la sua indole, sia il quadrante A B C, e nel mentre, che il raggio AB si aggira eguabilmente per lo suo perimetro, facciasi in modo, che la BD perpendicolare sulla AB si porti con moto eguabile, e parallelo per fino all' altro raggio A C. Siccome adunque il raggio, e la perpendicolare intersegansi continuamente, così con questo continuo loro intersegamento si avrà la sua curva B M E, di cui riguardava come base la A E. *Fig. 93.*

461. Quindi la proprietà principale di questa curva si è, che se per un punto

punto di essa M tirisi, così il raggio A O, come la M N parallela alla sua base AE, sia AB a BN, come il perimetro del quadrante B O C all' arco B O; onde, per mezzo di essa, potrà facilmente dividersi l' arco B O, o sia l' angolo B A O in data ragione, non dovendosi fare altra cosa, se non che dividere la B N talmente nel punto P, che B P sia ad N P in quella data ragione; poichè, se tirisi la PQ parallela alla A E, che s' incontri colla curva nel punto Q, e per questo punto conducasi il raggio AR, sarà BR ad OR, come B P ad N P; ed in conseguenza ancora li due archi B R, O R saranno in quella stessa data ragione.

462. Fu dato poi da Dinostrato a questa curva il nome di quadratrice, per la ragione, che per mezzo di essa può aversi facilmente la quadratura del cerchio, per essere la sua base A E terza proporzionale dopo il perimetro del quadrante B O C, ed il raggio A C. In fatti, se C *c* sia un arco così picciolo, che possa riguardarsi, come una picciola retta, perpendicolare sul raggio AC, e congiunta la A *c*, che s'incontri colla curva nel punto *e*, tirisi la *e a* parallela allo stesso raggio; saranno equiangoli li due piccioli triangoli A C *c*, *e* A *a*, onde sarà C *c* ad A *a*, come A C

AC ad *ae*, o ſia AE. Ma, per l'indole della curva, C*c* ſta ad A*a*, come il perimetro del quadrante AOC al raggio AC. Dunque ſarà il perimetro AOC al raggio AC, coſi lo ſteſſo raggio alla baſe della curva AE.

463. Colla tangente intanto della ſteſſa curva può determinarſi la lunghezza di un arco di quel perimetro. Sia perciò MT la retta, che tocca la curva nel punto M; ed alzata ſul raggio AO la perpendicolare MH, tiriſi la TH parallela allo ſteſſo raggio. Adunque, ſe A*o* ſia un' altro raggio, infinitamente vicino al primo AO, che s' incontri colla curva nel punto *m*, e colla MH nel punto *r*, e ſiano ancora MN, *mn* parallele alla baſe della curva AE; ſarà AO ad AM, come O*o* ad M*r*. Ma O*o* ſta ad M*r* in ragion compoſta di O*o* ad N*n*, di N*n* ad M*m*, e di M*m* ad M*r*; ed in conſeguenza in ragion compoſta di CO ad AN, di AN ad MT, e di MT ad MH, le quali tre ragioni compongono la ſemplice ragione di CO ad MH. Dunque ſarà AO ad AM, come CO ad MH; e pertanto la quarta proporzionale dopo le tre AM, AO, MH ſarà la lunghezza dell'arco CO. *Fig. 94.*

464. Alla ſteſſa curva compete ancora un' altra proprietà, e ſi è, che *Fig. 95.*

ſe

se per un punto di essa M tirisi il raggio A O, e dal punto O si abbassi sull' altro raggio A C la perpendicolare O S; l' arco C O sia alla perpendicolare abbassata O S, come A M ad A E. In fatti, tirata la M N parallela al raggio A C, C O sta ad O S in ragion composta di C O ad A N, e di A N ad O S. Ma C O sta ad A N, come B C ad A B, o pure come A B ad A E; ed A N sta ad O S, come A M ad A O, o sia A B. Dunque C O sarà ad O S in ragion composta di A B ad AE, e di AM ad AB; ed in conseguenza nella semplice ragione di AM ad AE. Onde, attenta questa proprierà, niente sarà più facile, quanto di descrivere sopra una retta data un arco di cerchio, che sia in data ragione colla stessa retta.

Fig. 95. 465. Sia perciò F G la retta data, e descritta nel quadrante ABC la quadtatrice B E, pongasi, che la data ragione sia di A H ad A E. Descrivasi col centro A, e coll' intervallo della A H l' arco H M, che s' incontri colla quadratrice nel punto M; indi, tirato per questo punto il raggio A O, si abbassi sull' altro raggio A C la perpendicolare O S. Facciasi di poi l' angolo G F I eguale all' angolo A O S; e se divisa la F G per metà nel punto K, si alzi si alzi su di essa la perpendicolare KI, che s'incontri colla FI nel punto I, si avrà con questo punto il centro dell' arco FLG, che si dimanda. Per dimostrarlo, prolunghisi la IK per sino a che s' incontri coll' arco FLG nel punto L.

466. Essendo adunque eguali li due angoli GFI, AOS, saranno eguali ancora gl' altri due GIL, CAO; e per tanto facendosi simili, tanto li due settori FIL, CAO, quanto li due triangoli FIK, OAS, sarà FL ad FK, come CO ad OS. Ma, per essere l'arco FLG duplo dell' arco FL, e la FG dupla della FK, l' arco FL sta ad FK, come l' arco FLG ad FG. Dunque ancora l' arco FLG, descritto sulla retta data FG, sarà alla stessa retta, come CO ad OS; e pertanto, essendosi dimostrato, che CO sia ad OS, come AM, o sia AH ad AE, sarà l' arco FLG alla retta FG similmente, come AH ad AE, ed in conseguenza nella data ragione.

467. Per essere ogn' arco maggiore della sua corda, chiaro si è, che nel proposto problema la data ragione debba essere di maggior disuguaglianza; onde, essendo la AH maggiore della AE, l' arco HM descritto col centro A, e coll' intervallo della AH, dovrà in-

incontrarsi senza meno colla quadratrice in un qualche punto M. Se poi la data ragione faccia, che la A H sia eguale al raggio A C; sarà B il punto dell' incontro, e si risolverà il problema, con descrivere un mezzo cerchio sulla retta data F G. Ed in fine, se la stessa data ragione sia tale, che la A H facciasi maggiore del raggio AC; in tal caso, per avere il punto dell'incontro, e risolvere il problema, bisognerà distendere più oltre la quadratrice.

Fig. *96.* 468. In fatti siccome di questa curva il vero vertice è il punto E, così per intendere, quale sia l' intera sua configurazione, deesi fare incominciare dalla A C, così la rivoluzione equabile del raggio, come il moto equabile, e parallelo della retta. In questa guisa pure si descriverà la stessa curva EMB; ma, se terminato il cerchio seguitino il raggio, e la retta a muoversi colle stesse direzioni, ella non solo si distenderà all' infinito verso X, ma fatta la BF eguale alla A B, avrà ancora per suo asintoto la retta, che tirasi per lo punto F parallela alla AC. Anzi, se prolungata la AF verso F, prendansi su di essa infinite altre porzioni eguali alla AF, e per gli loro termini tirinsi rette parallele alla A C; colla continuazione degli stessi moti la medesima curva va ſarà accompagnata da infinite altre curve diſtaccate, di cui ciaſcuna avrà per ſuoi aſintoti le due parallele, tra le quali ritrovaſi racchiuſa.

469. Si vuol però notare, che la curva, così deſcritta, inſieme coll'altre infinite, che l' accompagnano, è ſoltanto la metà della curva intera. In fatti, dopo che la retta col ſuo moto eguabile, e parallelo ſi fa infinitamente diſtante dalla AC, la ſua diſtanza dalla AC dee farſi in appreſſo più che infinita, cioè negativa; onde, conforme dee ella ritornare verſo la AC dal lato oppoſto, così con queſto ſuo ritorno ſi deſcriveranno dall' altro lato della AC, primieramente altre infinite curve diſtaccate ſimili alle prime, ed indi quella, che ſimile alla XCE congiungeſi con eſſa nel medeſimo vertice E; le quali tutta volta poſſono averſi collo ſteſſo ordine delle prime, ſe la rivoluzione eguabile del raggio, ed il moto eguabile, e parallelo della retta incomincino di nuovo dalla AC con direzioni contrarie.

470. Del rimanente la ſpirale di Archimede, e la quadratrice di Dinoſtrato riguardanſi come curve meccaniche, ovvero traſcendentali, in quanto che ſe dalli loro punti ſi abbaſſino ordinate, o ſiano rette parallele su di un

altra

altra retta data di posizione, non può determinarsi con esattezza il rapporto, che serba ciascuna di esse colla corrispondente porzione dell' altra retta, siccome riesce di determinarlo nell'altre curve, che chiamansi geometriche. Onde, conforme pongonsi a calcolo ambedue le curve, con rapportare li loro punti ad altri, che ad essi corrispondono nella circonferenza di un dato cerchio; così delle medesime dee farsi uso, qualora trattasi di risolvere problemi, che riduconsi alla ricerca d' archi circolari, siccome appunto è il problema di dividere un dato angolo in data ragione.

471. Questo stesso problema intanto potrà risolversi con curve geometriche, se mai la data ragione sia di numero a numero; poichè in questo caso riducesi il problema alla ricerca di un' angolo, che contenga una data parte aliquota dell' angolo dato; onde ci somministra la Geometria il modo, di definire il rapporto tra le due rette, da cui ricevono li due angoli la loro determinazione, siccome si è veduto nel problema speciale della trisezione dell' *Fig.* angolo. Ma, per dimostrarlo general-*97.* mente, sia X A Z un' angolo qualsivoglia, e con una data retta A B forminsi tra li suoi lati li triangoli isosceli A B C, B C D, C D E, D E F, E F G.

EFG. Attenta adnnque la loro indole, chiaro ſi è, che dell'angolo XAZ ſia duplo l'angolo CBD, triplo l'angolo DCE, quadruplo l'angolo EDF, e quintuplo l'angolo FEG.

472. Or ſe ſulle baſi degli ſteſſi triangoli ſi abbaſſino le perpendicolari BH, CI, DK, EL, FM, ſaranno equiangoli tra di loro gl'altri triangoli ABH, ACI, ADK, AEL, AFM; ed in conſeguenza per mezzo di eſſi colla ſola AB potrà determinarſi il rapporto, primieramente tra le due AH, BI, indi tra le due AH, CK, in appreſſo tra le due AE, DL, e finalmente tra le due AH, EM. Onde, ſe ſia dato l'angolo FEG, e debbaſi egli dividere in altri due, che ſiano tra di loro, come 2 a 3; dovrà determinarſi l'angolo BAC, che è la ſua quinta parte; e pertanto, eſſendo noto il rapporto tra le due AH, EM, ſi potrà dalla EM, che determina l'angolo dato FEG, dedurre l'altra AH, da cui riceve la ſua determinazione l'altro BAC, che deeſi ritrovare.

473. Si vuol però notare, che conforme per la determinazione del rapporto tra le due AH, EM, debbonſi prima determinare gradatamente gl'altri tre precedenti: così in ciaſcuno di eſſi ſi anderà ſempre più complicando la

AH. Onde se bene, per dedurre la EM dalla AH, bastino le sole proporzioni, che ci somministrano li triangoli equiangoli ABH, ACI, ADK, AEL, AFM; nientedimeno, per dedurre al contrario la AH dalla EM, si ha bisogno di curve geometriche, che siano d'indole più composta, così della linea circolare, come della parabola, dell'ellisse, e dell'iperbole; ma spiegheremo in un'altro trattato, come debbasi giudicare dell'indole delle curve, e per qual ragione a quelle, che riguardansi come meccaniche, siasi dato ancora il nome di curve trascendentali.

474. Dal problema di dividere un dato angolo in data ragione, non è molto diverso l'altro, di formare un angolo, che sia in data ragione con un altro angolo dato; anzi, se la data ragione sia di minor disuguaglianza, ancora quest'altro si risolverà con dividere il dato angolo in data ragione. Se poi la data ragione sia di maggior disuguaglianza, e la medesima non possa esprimersi con numeri, si avrà bisogno per risolverlo di una qualche curva meccanica. Ed in fine, se con essere ella di maggior disuguaglianza, sia altresì di numero a numero, si risolverà il problema con curve geometriche, per ridursi alla ricerca di un'angolo, che

che ſia parte aliquota, così dell'angolo dato, come dell'altro, che ſi dimanda.

475. In fatti, ſe debbaſi formare un'angolo, che ſia ad un'altro angolo dato, come 3 a 2; primieramente ſi ritroverà un'angolo, che ſia eguale alla metà del dato angolo, ed indi col ſuo triplo ſi avrà l'angolo ricercato. E così ancora, ſe ſia propoſto di formare un'angolo, che ſia ad un'altro angolo dato, come 4 a 3, primieramente dovrà ritrovarſi un'angolo, che ſia eguale alla terza parte del dato angolo, ed indi col ſuo quadruplo ſi avrà l'angolo, che ſi dimanda. Conforme poi, dopo eſſerſi ritrovato un'angolo, che ſia parte aliquota comune dell'angolo dato, e dell'altro, che deeſi formare, ſi ha biſogno di un ſuo moltiplice; così, ſecondo è ſtato poc'anzi avvertito, potrà averſi queſto ſuo moltiplice con ſole rette proporzionali.

476. Del rimanente col primo di queſti due problemi potrà formarſi un triangolo iſoſcele, in cui ciaſcuno degl'angoli ſopra la baſe ſia in data ragione coll'angolo verticale. Si abbaſſi perciò la perpendicolare ſulla baſe del triangolo iſoſcele; e ſiccome la medeſima divide l'angolo verticale per metà, così ciaſcuno degl'angoli ſopra la baſe formerà un retto colla metà dell'ango-

lo verticale. Ma, essendo data la ragione di ciascuno di essi coll' intero angolo verticale, dee essere data altresì la ragione, che serbano colla sua metà. Dunque, se dividasi l'angolo retto in due angoli, che siano tra di loro in quest' altra data ragione, col duplo del minore si avrà l' angolo verticale del triangolo isoscele, che deesi formare.

Fig. 98. 477. Coll' altro problema poi si potrà da un dato cerchio, come ABC, tagliare un' arco, che sia eguale all'arco DE di un' altro dato cerchio DEF Siano perciò G, ed H li centri delli due cerchi dati, e facciasi nel primo di essi ABC l' angolo AGB eguale all' angolo DHE. Saranno adunque simili li due settori HDE, GAB; ed in consegnenza li due archi DE, AB saranno nella stessa ragione colli loro raggi DH, AG. Onde, se nello stesso cerchio ABC formisi l' altro angolo AGC, che sia all' angolo AGB, come DH ad AG; saranno in questa stessa ragione ancora li due archi AC, AB; e pertanto l' arco AC sarà eguale all' altro dato DE.

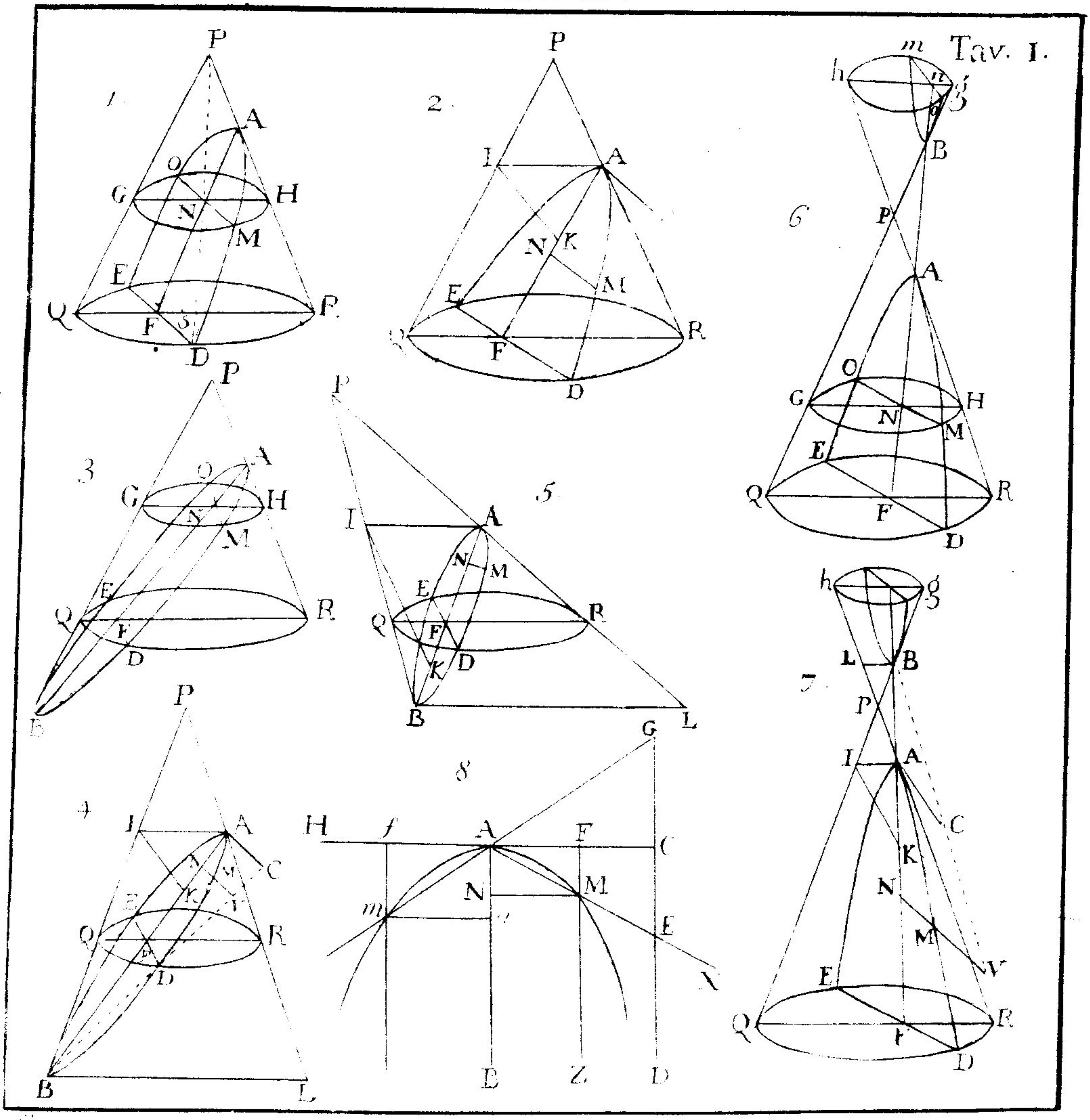
IN-

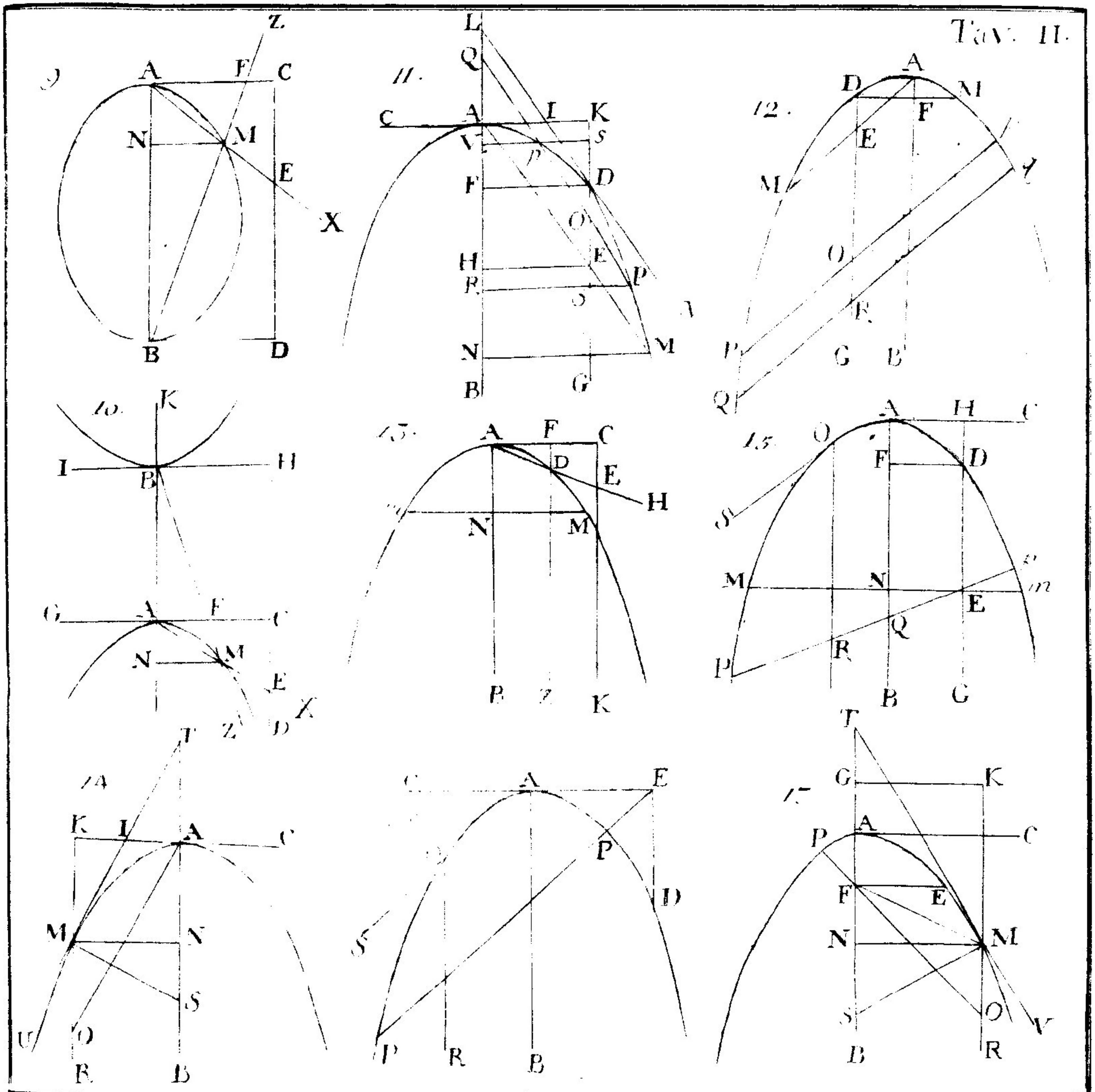
INDICE

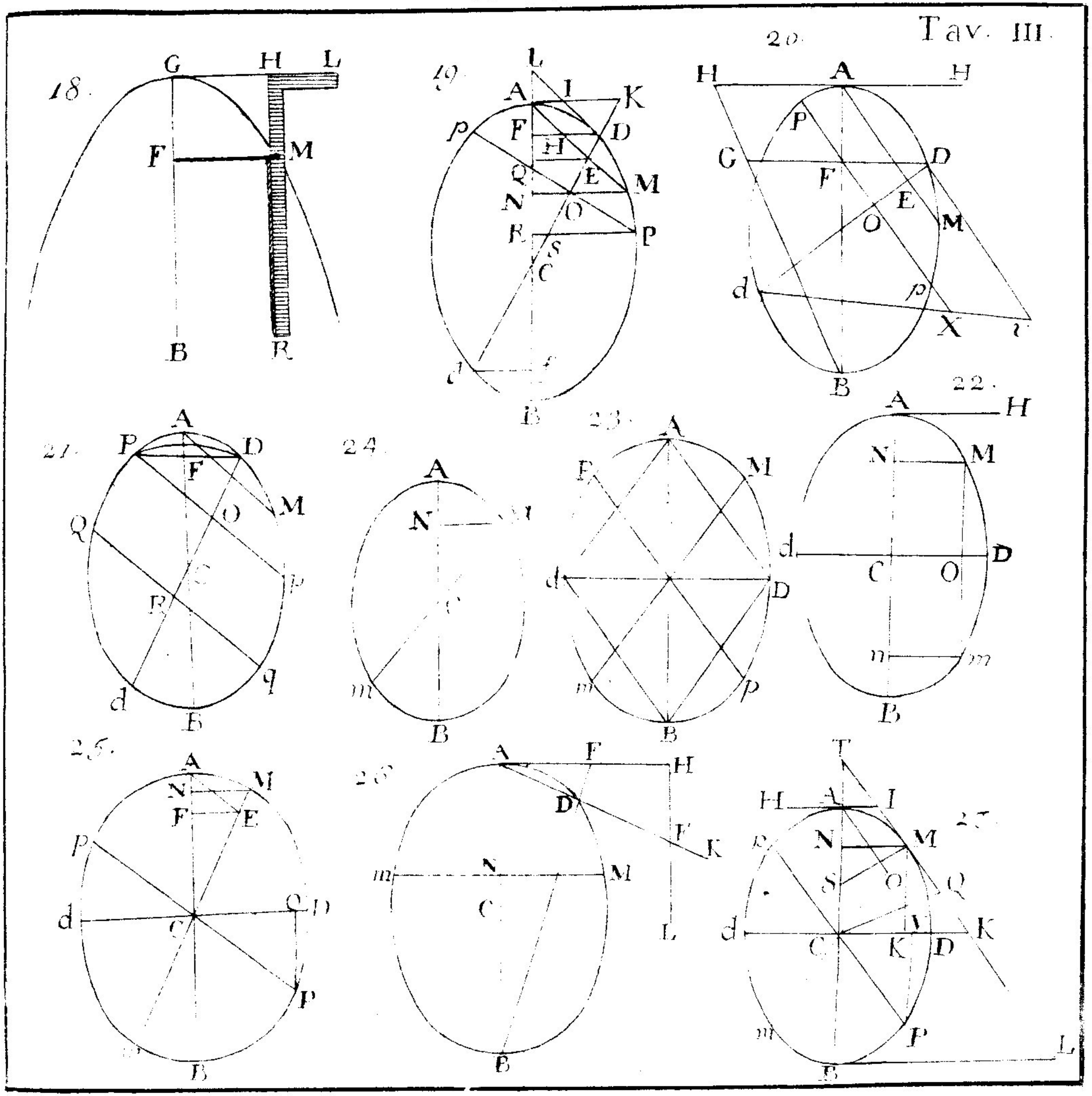
DELLI PARAGRAFI

CONTENUTI NEL TERZO LIBRO DELLE SEZIONI CONICHE.

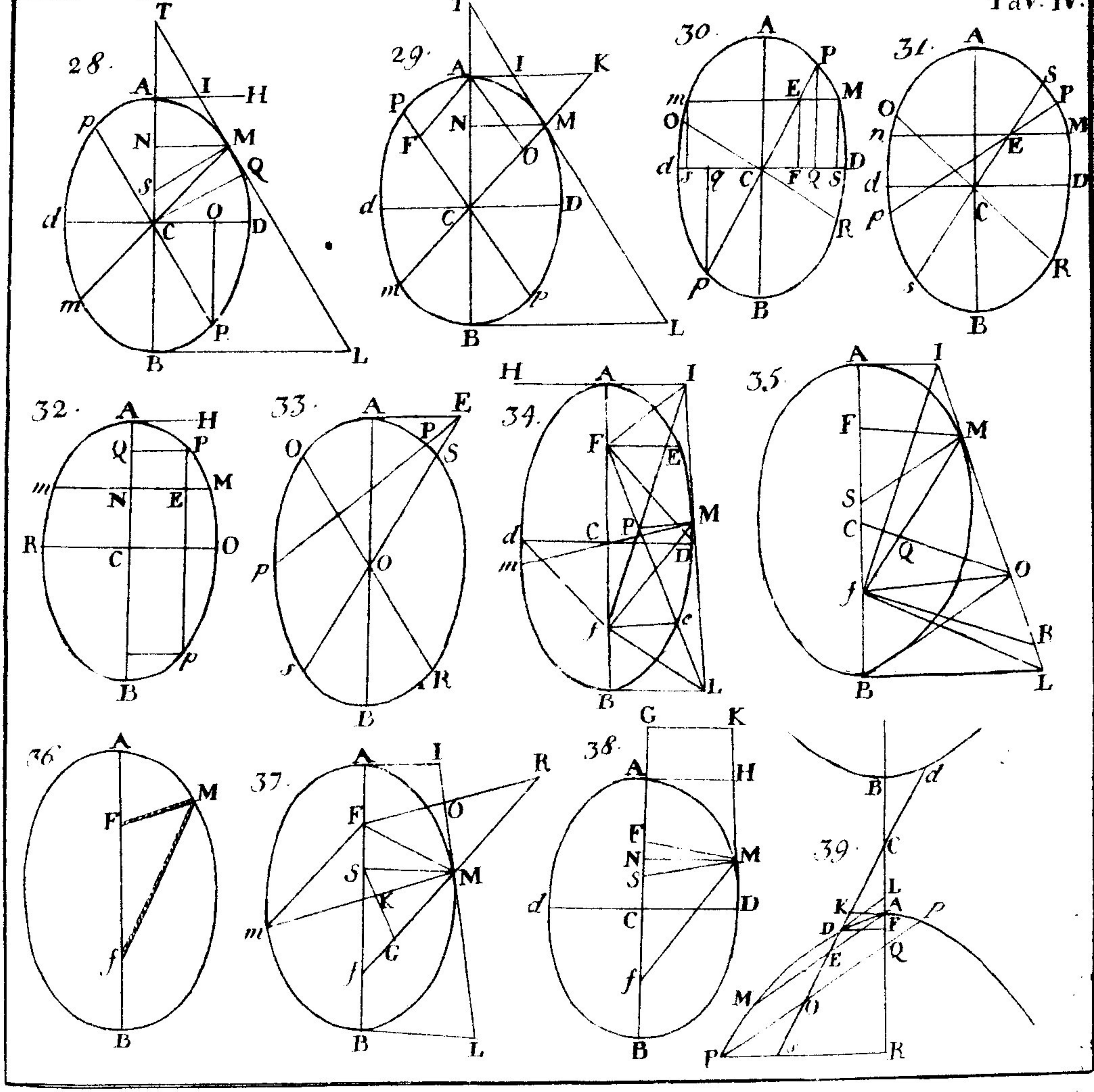
§.XII.

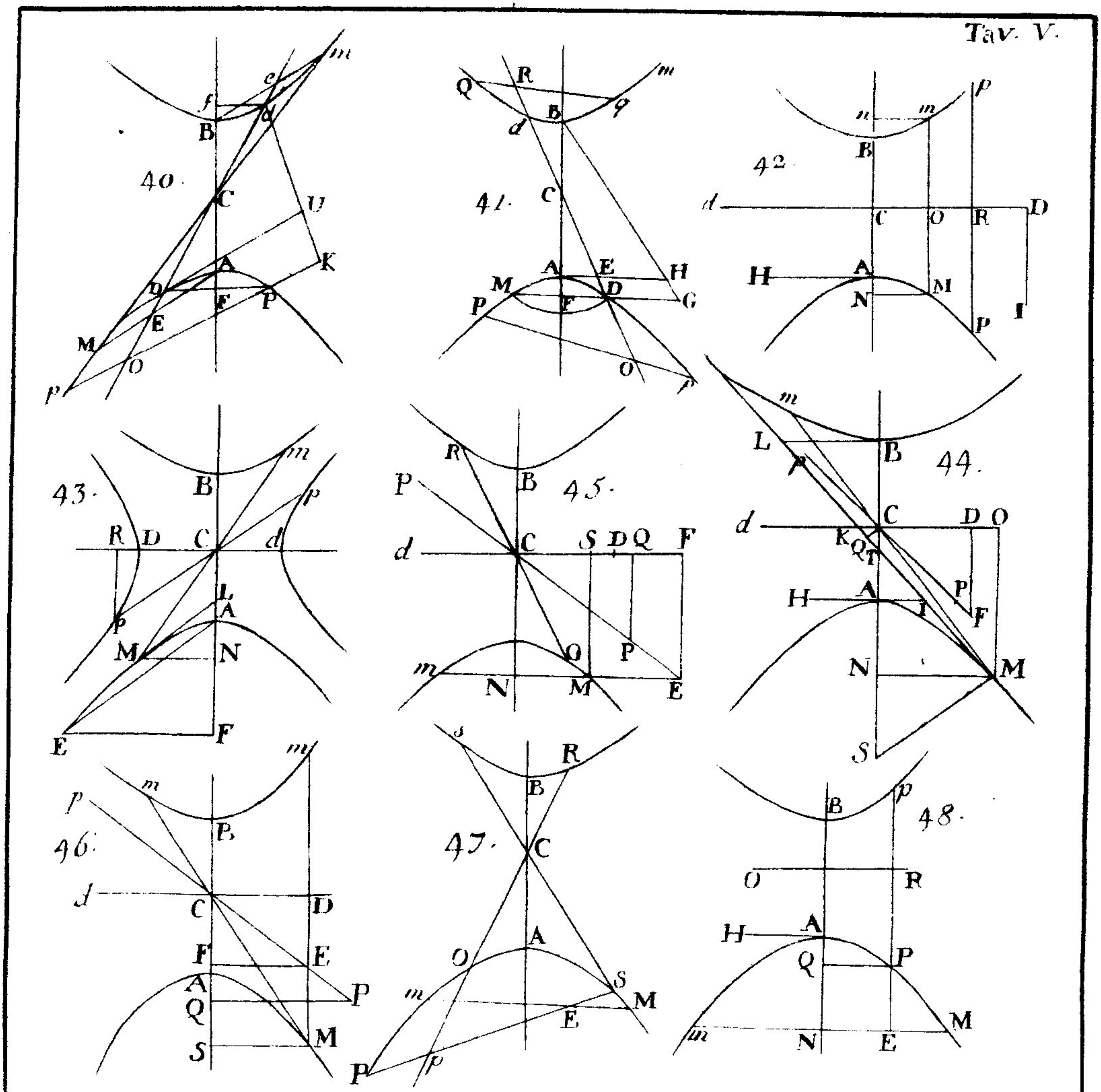

Tav. I.
1
2
3
4
5
6
7
8

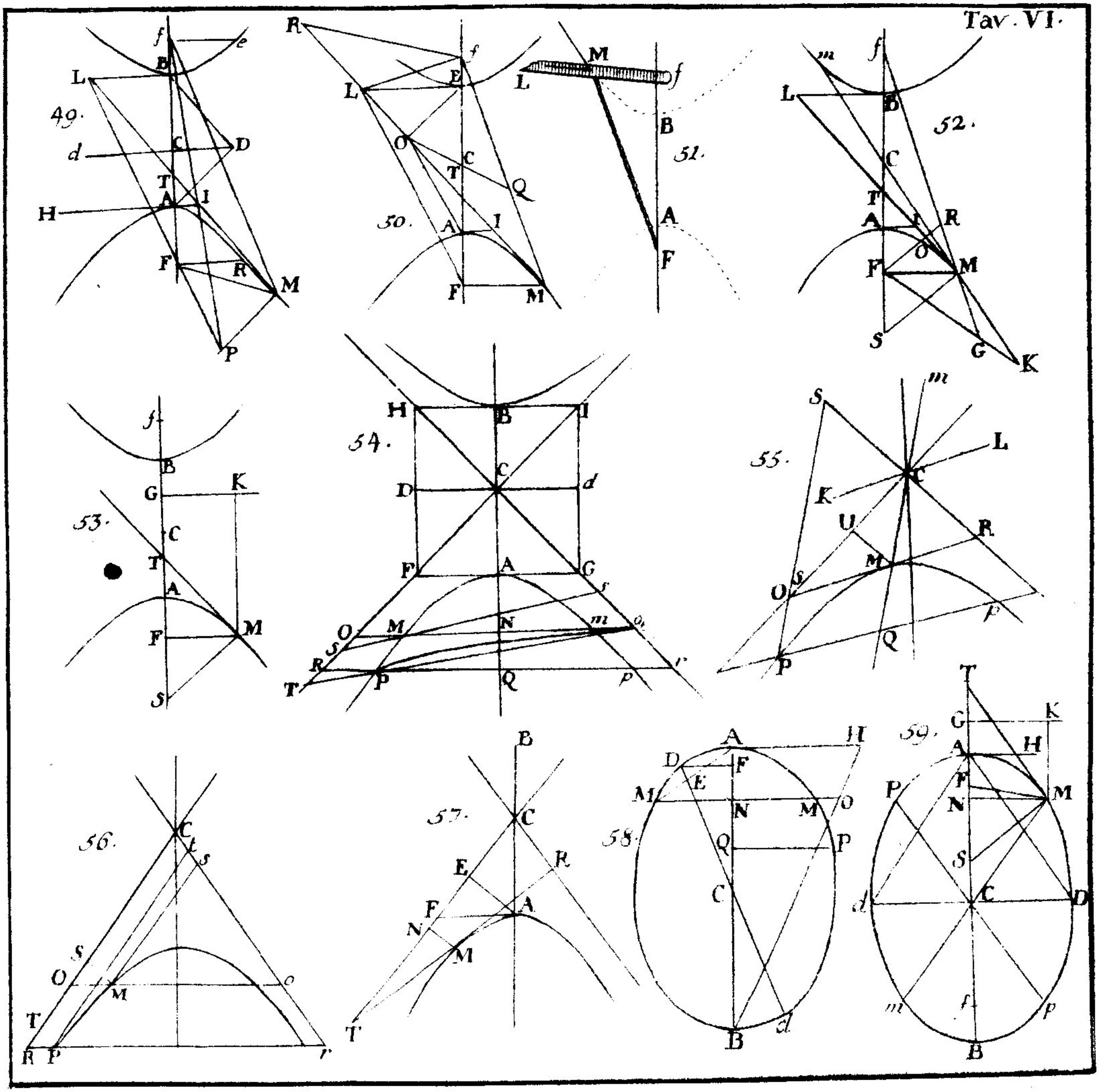

Tav. II.


Tav. III.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.

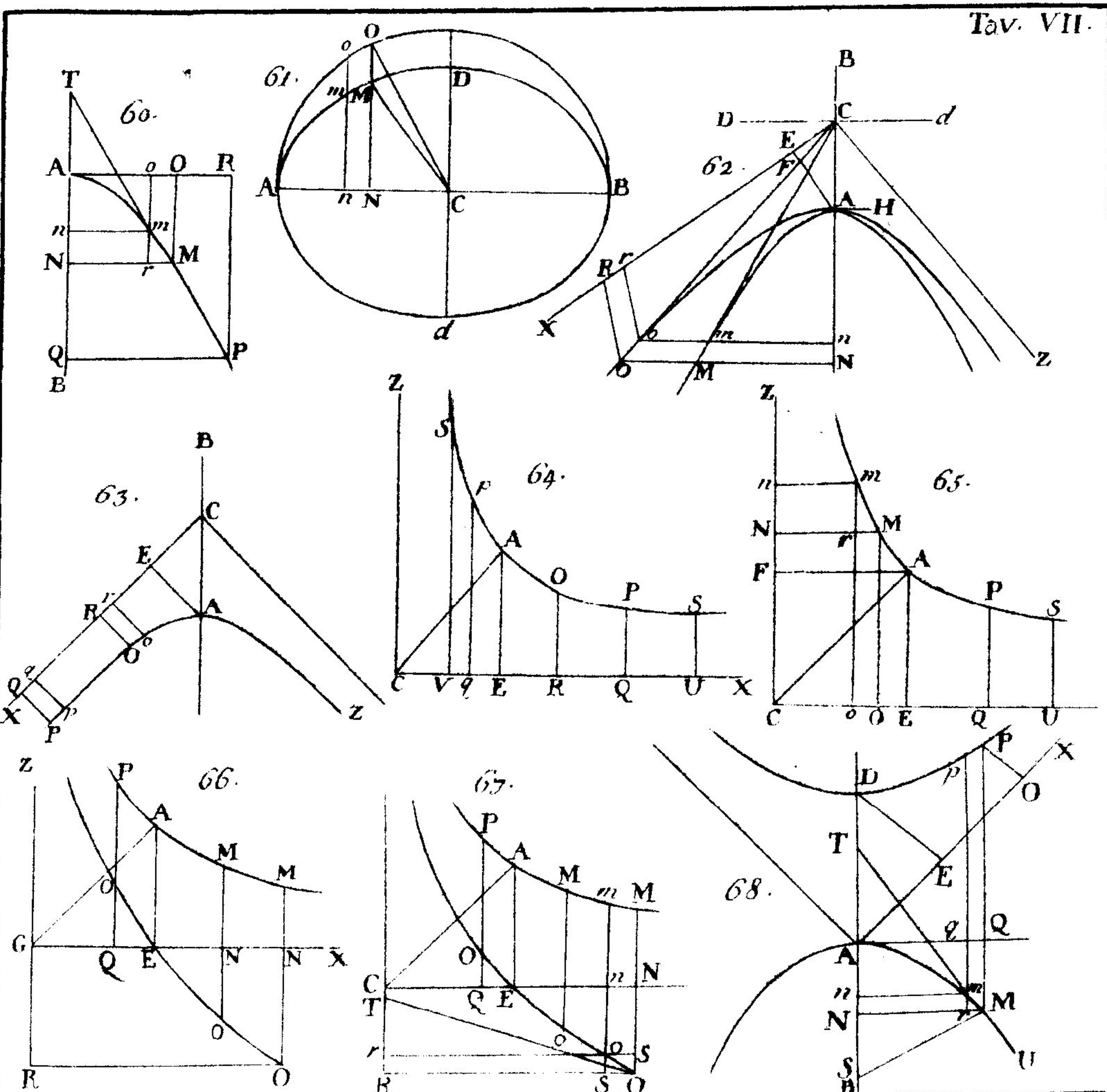
Tav. IV.



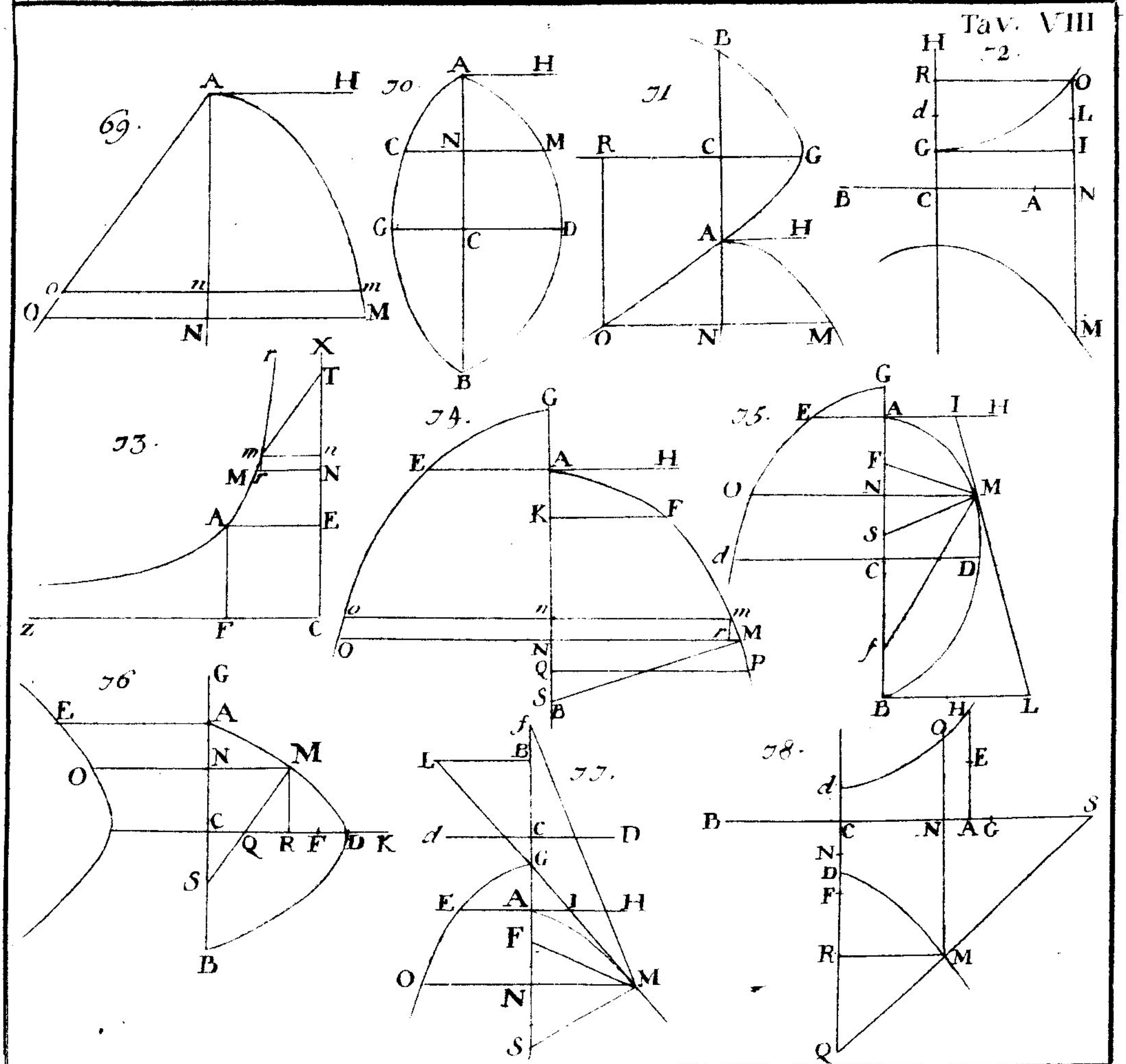

Tav. V.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.

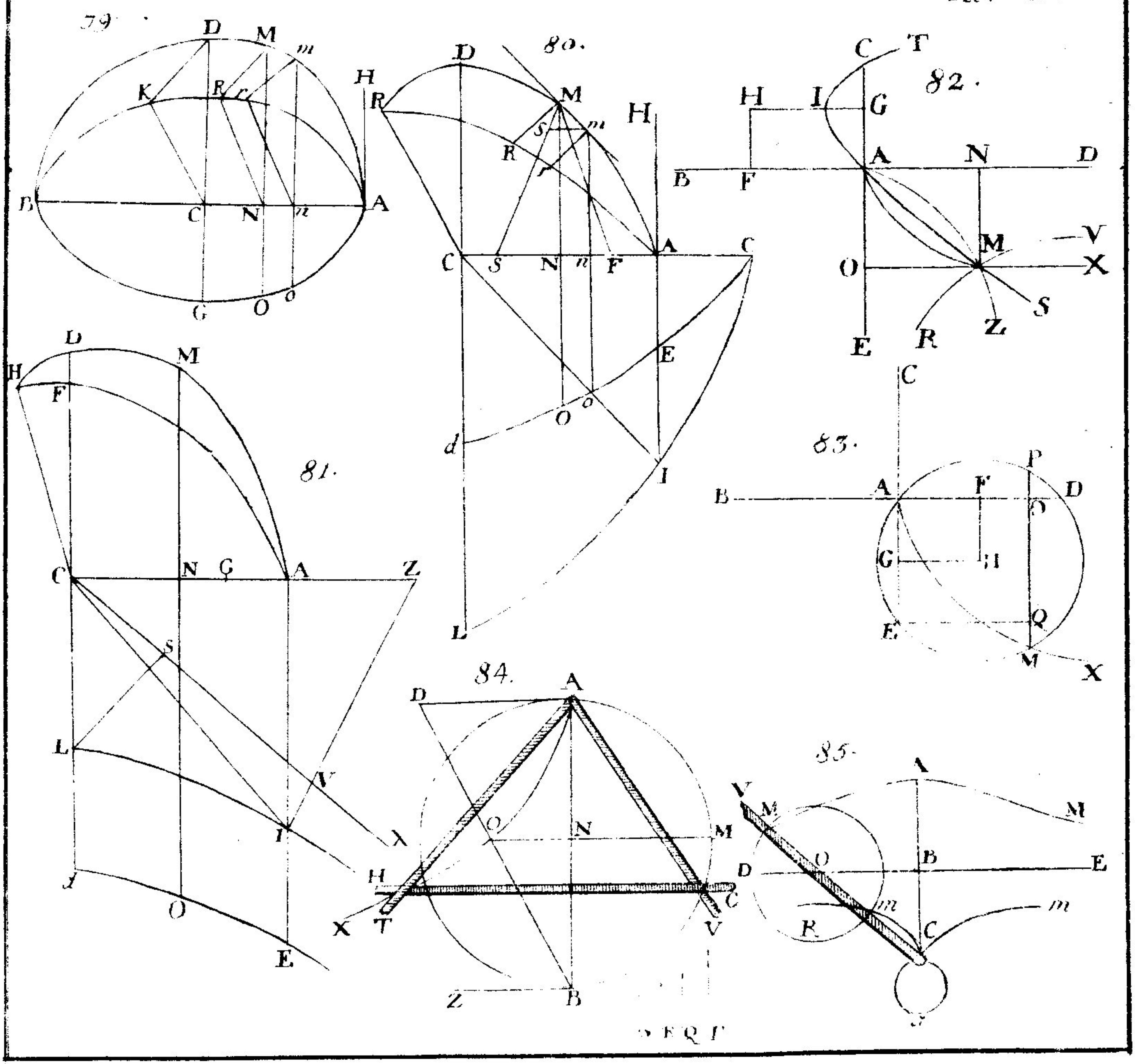


Tav. VI.
49.
50.
51.
52.
53.
54.
55.
56.
57.
58.
59.


Tav. VII.
60.
61.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68.

Tav. VIII




79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.

Tab. X.